

Л. Л. Афремов, А. В. Панов

**ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
СПЛОШНЫХ СРЕД. НАМАГНИЧЕННОСТЬ
НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ**

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2005

ББК 22.334

А 94

Афремов Л. Л., Панов А. В.

А 94 **Задачи по электродинамике сплошных сред. Намагниченность невзаимодействующих частиц.** — Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2005. — 28 с.

В методическом пособии приведены задачи по электродинамике сплошных сред. Представлены задачи к разделу «Намагниченность невзаимодействующих частиц», посвящённые изучению различных видов остаточной намагниченности системы невзаимодействующих однородных и неоднородных по химическому составу однодоменных частиц.

Рекомендуется студентам физических специальностей.

А $\frac{1704040000}{180(03) - 05}$

ББК 22.334

© Афремов Л. Л., 2005

© Панов А. В., 2005

Задача 1. Рассчитать нормальную остаточную намагниченность ансамбля N однодоменных не взаимодействующих частиц, имеющих форму вытянутых эллипсоидов вращения. Считать, что

- 1) магнитные моменты частиц ориентированы по или против внешнего магнитного поля \mathbf{H} ;
- 2) функция распределения по углам между осями кристаллографической анизотропии и анизотропии формы $\alpha = \psi/2$ и по величине константы анизотропии формы k_N равномерна:

$$f(k_N, \psi) = \begin{cases} \frac{N}{k_0\pi}, & 0 \leq k_N \leq k_0, \quad 0 \leq \psi \leq \pi, \\ 0, & k_N > k_0, \quad \psi > \pi; \end{cases}$$

- 3) константа кристаллографической анизотропии $k_A > 0$.

В нормальную остаточную намагниченность дадут вклад частицы с критическими полями

$$H_0 = I_s \sqrt{k_A^2 + k_N^2 + 2k_A k_N \cos \psi} \leq H,$$

изображающие точки которых находятся в области, ограниченной полуокружностью радиуса H/I_s (см. рис. 1.а). При известном распределении по k_N и ψ легко рассчитать возникшую намагниченность.

Для определённости будем считать, что $k_A \leq k_0/2$. В этом случае в зависимости от соотношений между k_A , k_0 и H возможны четыре варианта:

1. $H \leq k_A I_s$ (рис. 1.а).
2. $k_A I_s \leq H \leq (k_0 - k_A) I_s$ (рис. 1.б).
3. $(k_0 - k_A) I_s \leq H \leq (k_0 + k_A) I_s$, (рис. 1.в).
4. $H \geq (k_0 + k_A) I_s$, (рис. 1.г).

В первом случае, для частиц одинакового объёма v

$$\begin{aligned} I_r(H) &= \frac{N I_s v}{3\pi k_0 V} \int_{\pi - \arcsin x}^{\pi} d\psi \int_{k_A(-\cos \psi - \sqrt{x^2 - \sin^2 \psi})}^{k_A(-\cos \psi + \sqrt{x^2 - \sin^2 \psi})} dk_N = \\ &= \frac{2ck_A I_s}{3\pi k_0} x^2 \left[F\left(\frac{\pi}{2}, x\right) - D\left(\frac{\pi}{2}, x\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $c = Nv/V$ — объёмная концентрация частиц, имеющих объём v , $x = \frac{H}{k_A I_s}$; $D\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = \frac{1}{x^2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, x\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, x\right) \right]$; $F\left(\frac{\pi}{2}, x\right)$, $E\left(\frac{\pi}{2}, x\right)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

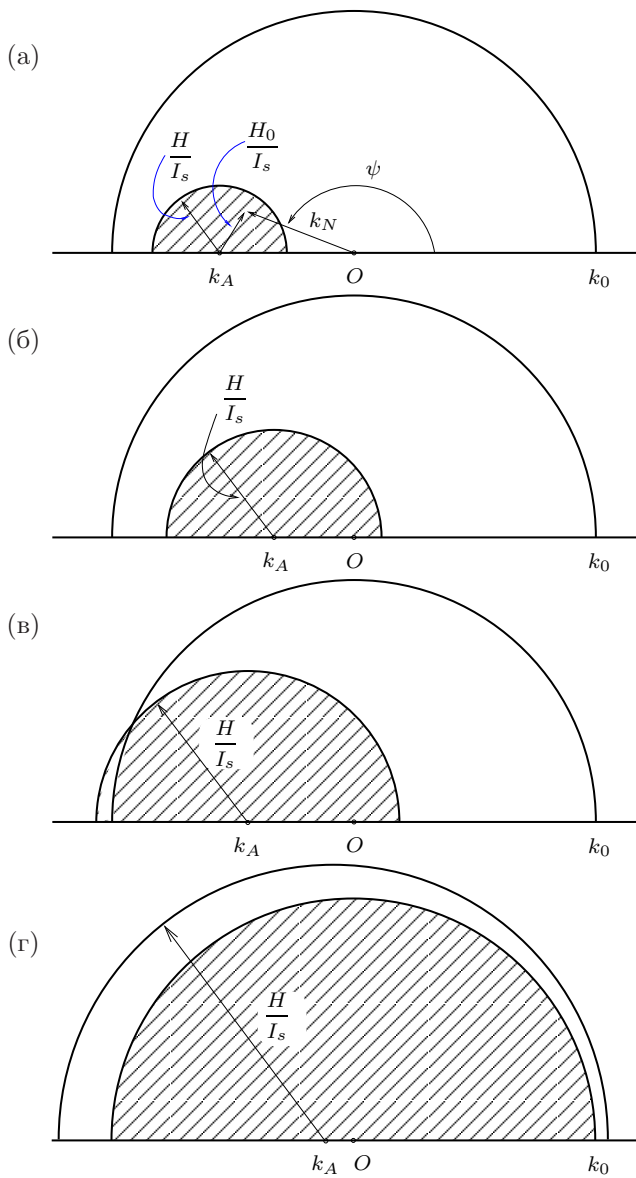


Рис. 1. К расчёту нормальной остаточной намагниченности.

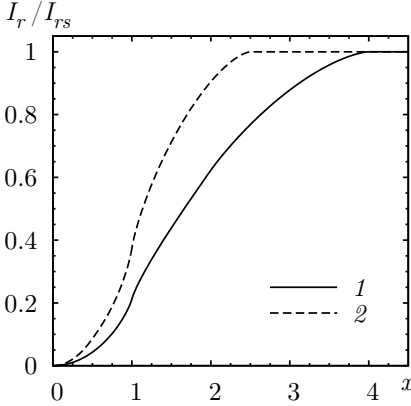


Рис. 2. Зависимость нормальной остаточной намагниченности I_r от приведённой величины поля $x = H/k_A I_s$. Кривая 1 соответствует $k_A/k_0 = 1/3$, кривая 2 — $k_A/k_0 = 2/3$.

В остальных трёх случаях намагниченность рассчитывается аналогично:

$$I_r(H) = \frac{2ck_A I_s}{3\pi k_0} x E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{x}\right), \quad 1 \leq x \leq \frac{k_0}{k_A} - 1, \quad (1.2)$$

$$I_r(H) = \frac{ck_A I_s}{3\pi k_0} \left\{ x G(\psi_1, x) + \frac{k_0}{k_A} (\pi - \psi_1) - \sin \psi_1 \right\}, \quad \frac{k_0}{k_A} - 1 \leq x \leq \frac{k_0}{k_A} + 1, \quad (1.3)$$

$$I_r = I_{rs} = \frac{cI_s}{3}, \quad x \geq \frac{k_0}{k_A} + 1. \quad (1.4)$$

В соотношениях (1.2), (1.3) приняты следующие обозначения:

$$G(\psi_1, x) = \begin{cases} 2E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{x}\right) - E\left(\pi - \psi_1, \frac{1}{x}\right), & \cos \psi_1 \leq 0, \\ E\left(\psi_1, \frac{1}{x}\right), & \cos \psi_1 \geq 0, \end{cases}$$

$$\cos \psi_1 = \frac{k_A}{2k_0} \left[x^2 - \left(\frac{k_0}{k_A}\right)^2 - 1 \right]. \quad (1.5)$$

В случае $k_A \geq k_0/2$ $I_r(H)$ рассчитывается аналогично. Зависимости I_r от H для двух отношений k_A/k_0 приведены на рис. 2.

Отметим, что при малых H ($H \ll k_A I_s$) остаточная намагниченность $I_r(H) \sim H^2$. Действительно, так как $x \ll 1$, то $F(\pi/2, x) \rightarrow \pi/2$, $D(\pi/2, x) \rightarrow \pi/4$, $\varphi \rightarrow \pi$, то есть

$$I_r(H) = \frac{c}{6k_0 k_A I_s} H^2. \quad (1.6)$$

Пропорциональность остаточной намагниченности квадрату поля не является результатом специально введённого распределения по k_N и ψ . При $H \ll k_A I_s$, $k_N \rightarrow k_A$, $\psi \rightarrow \pi$ и, если плотность распределения изображающих точек $f(k_A, \pi) \neq 0$, то

$$I_r(H) = \frac{Nm}{3V} \frac{f(k_A, \pi) \pi H^2}{k_A 2I^2} = \frac{c\pi f(k_A, \pi)}{6k_A I_s} H^2. \quad (1.7)$$

Воспользовавшись разложением в ряд эллиптических интегралов $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ при малых φ и k , нетрудно показать, что в полях $H \gg k_A I_s$ остаточная намагниченность сначала пропорциональна H , а затем стремится к остаточной намагниченности насыщения $I_{rs} = cI_s/3$ по закону

$$I_r(H) = \frac{cI_s}{3} \left\{ 1 - \frac{k_A \psi_1}{\pi k_0 x} \right\}. \quad (1.8)$$

Задача 2. Решить задачу 1 для ансамбля однодоменных не взаимодействующих частиц, имеющих форму сплюснутых эллипсоидов вращения.

В случае $k_A > 0$, $k_N < 0$ линией постоянного критического поля

$$H_0 = \frac{1}{2} I_s \left(k_A - k_N + \sqrt{k_A^2 + k_N^2 - 2k_A k_N \cos \psi} \right)$$

на диаграмме $[k_N, \psi]$ (см рис. 3) является гипербола с центром в точке $k_N = k_A/2$, $\psi = 0$.

$$k_N(H_0) = \frac{H_0(k_A I_s - H_0)}{I_s \left(H_0 - \frac{k_A I_s}{2} + \frac{k_A I_s}{2} \cos \psi \right)}. \quad (2.1)$$

Основные характеристики гиперболы — угол между асимптотами φ и действительная ось $2a$ определяются из уравнений:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{H_0}{k_A I_s}}, \quad (2.2)$$

$$2a = \begin{cases} \frac{2}{I_s} \left(\frac{k_A I_s}{2} - H_c \right), & H_0 \leq \frac{k_A I_s}{2}, \\ \frac{2}{I_s} \left(H_0 - \frac{k_A I_s}{2} \right), & H_0 > \frac{k_A I_s}{2}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Зная линию постоянного критического поля, нетрудно рассчитать нормальную остаточную намагниченность $I_r(H)$. Действительно, в поле H частицы с $H_0 \leq H$ переходят в состояние с параллельной полю ориентацией

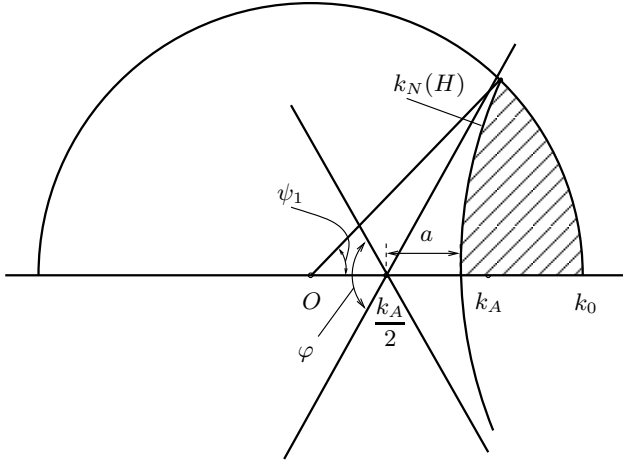


Рис. 3. К расчёту нормальной остаточной намагниченности частиц с константами анизотропии $k_A \geq 0$, $k_N \leq 0$.

магнитного момента. На диаграмме $[k_N, \psi]$ таким частицам соответствуют точки с координатами $k_N \geq k_N(H)$, $0 \leq \psi \leq \psi_1$

$$k_N(H) = k_A \frac{x(1-x)}{x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \psi}, \quad x = \frac{H}{k_A I_s}, \quad (2.4)$$

$$\psi_1 = 2 \arcsin \sqrt{x \left[1 - \frac{k_A}{k_0} (1-x) \right]}, \quad (2.5)$$

т. е. точки, попавшие на рис. 3 в заштрихованную область.

Таким образом, в поле $H \geq (k_A - k_0) I_s$ нормальная остаточная намагниченность частиц, имеющих одинаковый объём, равна

$$I_r(H) = \frac{I_s v}{V} \int_0^{\psi_1} d\psi \int_{k_N(H)}^{k_0} f(k_N, \psi) dk_N = \frac{ck_A I_s}{3\pi k_0} \left\{ \frac{\psi_1 k_0}{k_A} - \sqrt{x(1-x)} \ln \left[2x - 1 + \frac{2k_0}{k_A} + 2\sqrt{\left(\frac{k_0}{k_A} + x\right) \left(\frac{k_0}{k_A} - 1 + x\right)} \right] \right\}. \quad (2.6)$$

Если $H \ll k_A I_s$, то из (2.6) следует, что остаточная намагниченность в малых полях пропорциональна \sqrt{H}

$$I_r(H) = \frac{2cI_s}{3\pi} \beta_1 \sqrt{\frac{H}{k_A I_s}}. \quad (2.7)$$

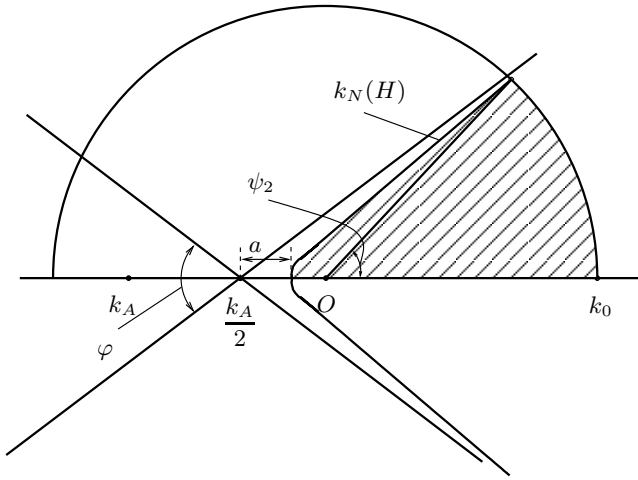


Рис. 4. К расчёту нормальной остаточной намагниченности частиц с константами анизотропии $k_A \leq 0$, $k_N \geq 0$.

Здесь

$$\beta_1 = \sqrt{1 - \frac{k_A}{k_0}} - \frac{k_A}{2k_0} \ln \left(\frac{2k_0}{k_A} - 1 + \sqrt{\frac{k_0}{k_A} \left(\frac{k_0}{k_A} - 1 \right)} \right).$$

Задача 3. Решить задачу 1, полагая, что константа кристаллографической анизотропии отрицательна.

Оценка нормальной остаточной намагниченности для случая $k_A \leq 0$, $k_N \geq 0$ проводится аналогично. При этом нужно учесть, что линией постоянного критического поля является гипербола

$$k_N(H_0) = \frac{H_0 (k_A I_s - H_0)}{I_s \left(\frac{k_A I_s}{2} - H_0 - \frac{k_A I_s}{2} \cos \psi \right)}, \quad (3.1)$$

центр которой находится в точке $k_N = ka/2$, $\psi = \pi$, а угол φ между асимптотами и действительная ось определяются соотношениями (2.2), (2.3). Так как частицам с критическими полями $H_0 \leq H$ на диаграмме $[k_N, \psi]$ соответствуют точки с $k_N \leq k_N(H)$, где $k_N(H)$ определяется фор-

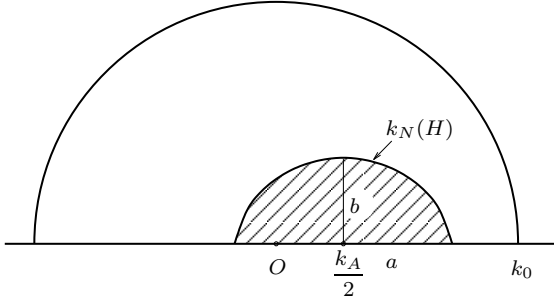


Рис. 5. К расчёту нормальной остаточной намагниченности частиц с константами анизотропии $k_A \leq 0$, $k_N \leq 0$.

мулой (3.1) с заменой в ней H_0 на H), $0 \leq \psi \leq \psi_2$ (см. рис. 4):

$$k_N(H) = k_A \frac{2x(1-x)}{1-2x-\cos\psi}, \quad (3.2)$$

$$\psi_2 = 2 \arcsin \sqrt{x \left[1 + \frac{k_A}{k_0}(1-x) \right]},$$

то намагниченность $I_r(H)$ равна

$$I_r(H) = \frac{ck_A I_s}{3\pi k_0} \left\{ \frac{\psi_2 k_0}{k_A} + \sqrt{x(1-x)} \ln \left[1 + \frac{2k_0}{k_A} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\sqrt{\left(\frac{k_0}{k_A} - x \right) \left(\frac{k_0}{k_A} + 1 - x \right)} \right] \right\}. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3), так же как и (2.6), выполняется при $H \geq (k_A - k_0)I_s$; если $H < (k_A - k_0)I_s$, то остаточная намагниченность системы частиц, для которых $k_0 < k_A$, равна нулю.

В малых полях остаточная намагниченность $I_r(H) \sim \sqrt{H}$:

$$I_r(H) = \frac{2cI_s}{3\pi} \beta_2 \sqrt{\frac{H}{k_A I_s}}. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\beta_2 = \sqrt{1 + \frac{k_A}{k_0}} + \frac{k_A}{2k_0} \ln \left(1 + \frac{2k_0}{k_A} + 2\sqrt{\frac{k_0}{k_A} \left(\frac{k_0}{k_A} + 1 \right)} \right).$$

Задача 4. Решить задачу 1, полагая, что константы кристаллографической анизотропии и анизотропии формы отрицательны.

Линией

$$H_0 = \frac{1}{2} I_s \left(k_A + k_N - \sqrt{k_A^2 + k_N^2 + 2k_A k_N \cos \psi} \right) = \text{const}$$

является эллипс с центром в точке $k_N = k_A/2$; $\psi = 0$

$$k_N(H_0) = \frac{H_0 (k_A I_s + H_0)}{I_s \left(\frac{k_A I_s}{2} + H_0 - \frac{k_A I_s}{2} \cos \psi \right)}, \quad (4.1)$$

полуоси которого определяются

$$a = k_A \left(\frac{1}{2} + \frac{H_0}{k_A I_s} \right); \quad b = k_A \sqrt{\frac{H_0}{k_A I_s} \left(1 + \frac{H_0}{k_A I_s} \right)}. \quad (4.2)$$

В нормальную остаточную намагничённость I_r , образованную в поле $H \leq (k_A - k_0)I_s$, дадут вклад частицы, изображающие точки которых попали в заштрихованную область (см. рис. 5).

Расчёт показывает, что

$$I_r(H) = \frac{ck_A I_s}{3k_0} \sqrt{x(1-x)}. \quad (4.3)$$

Если $H \geq (k_A - k_0)I_s$, то нормальная остаточная намагничённость определяется следующим образом:

$$I_r(H) = \frac{cI_s}{3\pi k_0} \left\{ k_0 \psi_3 + 2k_A \sqrt{x(1-x)} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{k_A(1+x) - k_0}{k_A x - k_0}} \right) \right\}, \quad (4.4)$$

где $\psi_3 = 2 \arcsin \sqrt{x \left[\frac{k_A}{k_0} (1-x) - 1 \right]}$.

Отметим, что так же, как и в двух предыдущих случаях, в малых полях $I_r(H) \sim \sqrt{H}$, в то время как нормальная остаточная намагничённость ансамбля частиц $k_A \geq 0$, $k_N \geq 0$ пропорциональна H^2 . Это связано с различной зависимостью критического поля H_0 от анизотропии формы и угла α . Если константы анизотропии положительны ($k_A \geq 0$, $k_N \geq 0$), то в слабых полях ($H \ll k_A I_s$) в процесс намагничивания вовлекаются частицы, для которых $\alpha \sim \pi/2$ (ось, выделяемая кристаллографической

анизотропией, перпендикулярна длинной оси эллипсоида) и $k_N \sim k_A$. Поэтому $I_r(H) \sim H^2$.

В случае, если константа анизотропии формы отрицательна, то в малых полях в намагниченность дают вклад частицы с $\alpha \sim 0$ независимо от k_N (так как при $k_N \leq 0$ выделяется «лёгкая плоскость»). На диаграмме $[k_N, \psi]$ за остаточную намагниченность ответственны частицы, изображающие точки которых попали в сектор с углом $\varphi/2 = \sqrt{H/(k_A I_s)}$ (при $k_A \leq 0$, $k_N \leq 0$ остаточную намагниченность определяет область, ограниченная эллипсом с полуосями $a = k_A/2$, $b = k_A \sqrt{H/(k_A I_s)}$). А так как остаточная намагниченность пропорциональна площади диаграммы $[k_N, \psi]$, то $I_r(H) \sim \sqrt{H}$.

Задача 5. В рамках модели, принятой в задаче 1, и приближении малых полей ($H \ll k_A I_s$) рассчитать пьезоостаточную намагниченность $I_r^\parallel(\sigma_+ H + H_0 \sigma_0)$, которая образуется в присутствии одноосных напряжений, приложенных параллельно внешнему полю \mathbf{H} .

Рассмотрим ансамбль однодоменных невзаимодействующих частиц одноосного ферромагнетика, имеющих форму вытянутых эллипсоидов вращения. Если напряжения параллельны плоскости, проходящей через длинную ось эллипсоида и ось, выделенную кристаллографической анизотропией, составляя с последней угол β (плоскость (k_A, k_N)), то максимальное критическое поле H_0 таких частиц, т. е. поле, необходимое для переброса магнитного момента зерна из состояния «против поля» в состояние «по полю», можно привести к виду

$$H_0 = I_s \sqrt{K_1^2 + k_N^2 + 2k_N K_1 \cos(\psi - \psi_0)}, \quad (5.1)$$

где

$$\psi_0 = \arctg \frac{\lambda_4 \sigma \sin 2\beta}{k_A + (\lambda_1 + \lambda_2)\sigma + (\lambda_1 - \lambda_2)\sigma \cos 2\beta},$$

$$K_1 = \sqrt{[k_A + (\lambda_1 + \lambda_2)\sigma + (\lambda_1 - \lambda_2)\sigma \cos 2\beta]^2 + [\lambda_4 \sigma \sin 2\beta]^2}$$

и

$$H_0 = I_s \sqrt{(k_A - k_\sigma)^2 + k_N^2 + 2k_N(k_A - k_\sigma) \cos \psi}, \quad (5.2)$$

где $k_\sigma = 2\lambda_3 \sigma$, если напряжения перпендикулярны плоскости (k_A, k_N) . Здесь ψ_0 — удвоенный угол между осью, выделяемой кристаллографической анизотропией k_A и «эффективной осью», которая определяется «конкуренцией» кристаллографической анизотропии с одноосными механическими напряжениями.

Несмотря на то, что напряжения меняют ориентацию «эффeктивных осей», будем считать, что оси 1/3 частиц параллельны приложенному полю H , оси остальных — перпендикулярны H . Такое упрощение обосновано тем, что при оценке остаточной намагничeнности мы будем пользоваться формулами (5.1), (5.2), так что любое изменение положения «эффeктивной оси» относительно поля H может привести лишь к уменьшению критического поля.

Если напряжения параллельны плоскости (k_A, k_N) , то линией постоянного критического поля на диаграмме $[k_N, \psi]$ является окружность радиуса H_0/I_s с центром в точке $k_N = K_1$ и $\psi = \psi_0 + \pi$, причём $\psi_0 > 0$ при $\lambda_4\sigma > 0$ и $\psi_0 < 0$ при $\lambda_4\sigma < 0$.

В приближении малых полей и напряжений ($H \ll k_A I_s$, $k_\sigma \ll k_A$) в процесс намагничивания вовлекаются частицы с $k_N \approx K_1$ и $\psi \approx \psi_0 + \pi$. Если принять, что плотность изображающих точек, соответствующих частицам с заданными k_A и ψ , можно считать постоянной:

$$\phi(k_N, \psi) = \begin{cases} \frac{N}{6\pi k_0 K_1}, & 0 \leq k_N \leq k_0, 0 \leq \psi \leq 2\pi \\ 0, & k_N > k_0, \end{cases} \quad (5.3)$$

то оценка величины намагничeнности сводится к вычислению площади той области диаграммы, для изображающих точек которой в процессе изменения напряжений выполняется условие $H_0 \leq H$. Так, например, намагничeнность

$$I_{r\pm}^{\parallel}(\sigma_+ H_+ H_0 \sigma_0) = \frac{I_s v}{V} \iiint \phi(k_N, \psi) S_{k_N, \psi} \varphi(\beta) d\beta dk_N d\psi, \quad (5.4)$$

возникающая при наличии одноосного механического воздействия, параллельного полю H независимо от знака напряжений (см. рис. 6) определяется площадью диаграммы $[k_N, \psi]$: $S_{k_N, \psi} = \pi H^2 / I_s^2$ и функцией распределения по β , которую при хаотическом распределении «осей k_A » можно считать равномерной

$$\varphi(\beta) = \begin{cases} 1/\pi, & 0 \leq \beta \leq \pi, \\ 0, & \pi < \beta < 2\pi. \end{cases} \quad (5.5)$$

Учитывая, что

$$K_1(\beta) = K_1(\pi - \beta) = k_A \left[1 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\sigma + (\lambda_1 - \lambda_2)\sigma \cos 2\beta}{k_A} \right] \quad (5.6)$$

приходим к следующему выражению для остаточной намагничeнности:

$$I_{r\pm}^{\parallel}(\sigma_+ H_+ H_0 \sigma_0) = I_r(H) \left[1 \pm \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\sigma}{k_A} \right], \quad (5.7)$$

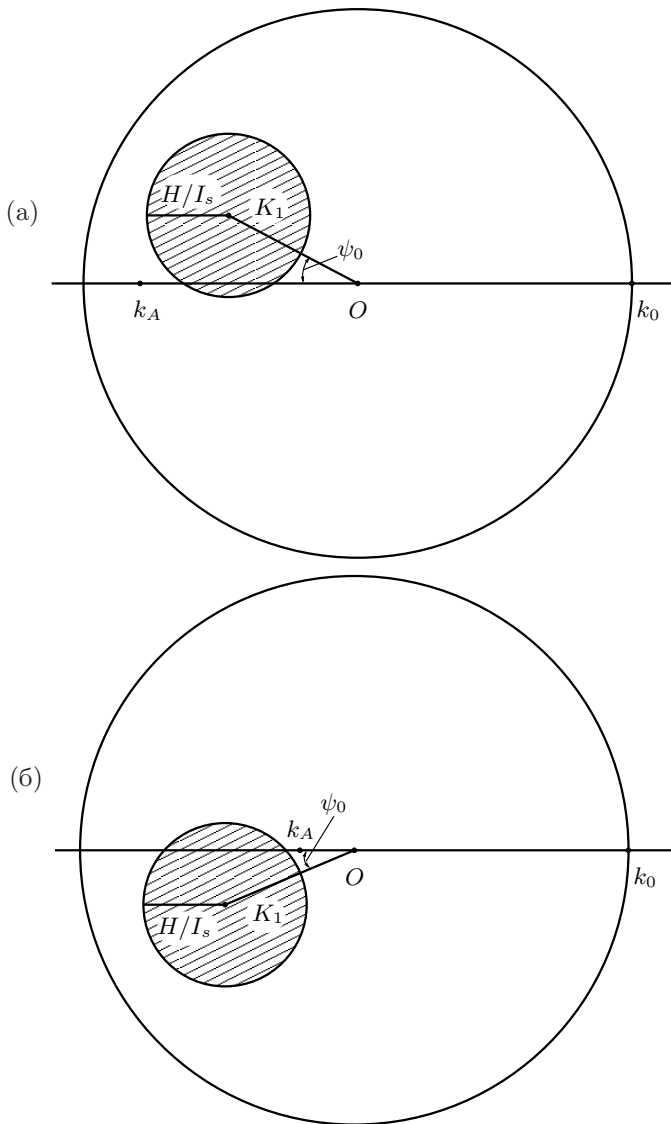


Рис. 6. Заштрихованные области соответствуют остаточной намагниченности $I_r^{\parallel}(\sigma_+ H_+ H_0 \sigma_0)$, возникающей при наличии сжимающих (а) или растягивающих (б) одноосных напряжений.

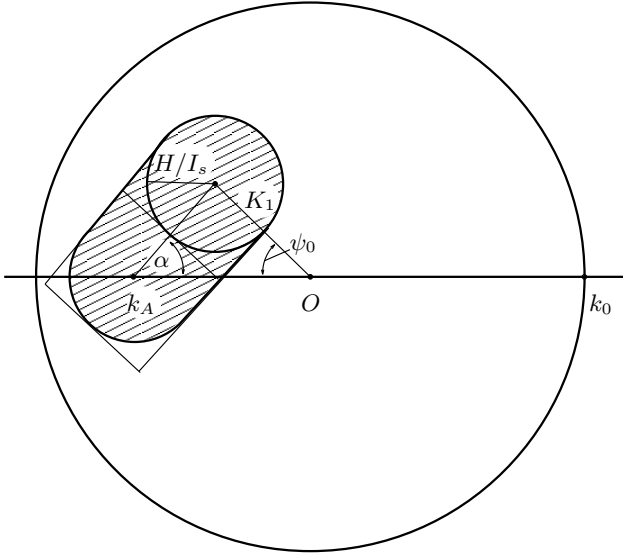


Рис. 7. Заштрихованная область соответствует пьезоостаточной намагниченности $I_r^{\parallel}(H_+ \sigma_+ \sigma_0 H_0)$.

где $I_r(H) = cH^2 / (6k_0 k_A I_s)$ — нормальная остаточная намагниченность, возникшая в малых полях ($H \ll k_A I_s$).

Задача 6. Решить задачу 5 при условии, что напряжения прикладываются и снимаются в присутствии магнитного поля H .

Если же напряжения прикладываются и убираются в присутствии поля H , то в намагниченность $I_r^{\parallel}(H_+ \sigma_+ \sigma_0 H_0)$ дадут вклад частицы, критические поля которых (см. (5.1)) $H_0 \leq H$, а изображающие точки попали в заштрихованную область (см. рис. 7). Площадь этой области равна

$$S_{k_N, \psi} = \frac{\pi H^2}{I_s^2} + \frac{K_1 \sin \psi_0}{\sin \alpha_0}, \quad (6.1)$$

здесь угол α_0 определяется следующим соотношением:

$$\alpha_0 = \arctg \frac{\lambda_4 \sigma \sin 2\beta}{\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cos 2\beta}. \quad (6.2)$$

Используя (5.1) и (6.2), выражение (6.1) можно преобразовать к следую-

щему виду

$$S_{k_N, \psi} = \frac{\pi H^2}{I_s^2} + \frac{2H\sigma}{I_s} \{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_4^2 + 2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos 2\beta +$$

$$+ [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_4^2] \cos^2 2\beta\}^{1/2}. \quad (6.3)$$

В приближении малых полей и сжимающих (+) либо растягивающих (-) напряжений ($H \ll k_A I_s$, $\lambda_i \sigma \ll k_A$)

$$I_{r\pm}^{\parallel}(H_+ \sigma_+ \sigma_0 H_0) = \frac{I_s v}{V} \iiint \phi(k_N, \psi) S_{k_N, \psi} \varphi(\beta) d\beta dk_N d\psi =$$

$$= I_r(H) \left[1 \pm \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\sigma}{k_A} \right] + \frac{c\Lambda\sigma H}{3\pi k_0 k_A}. \quad (6.4)$$

Здесь приняты обозначения задачи 5, Λ — эффективная константа магнитоострикции одноосного кристалла:

$$\Lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_4^2 + 2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos 2\beta + [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_4^2] \cos^2 2\beta} d\beta. \quad (6.5)$$

Задача 7. Решить задачу 5 считая, что напряжения перпендикулярны полю H .

Оценить влияние одноосных механических напряжений, приложенных перпендикулярно полю, на процесс возникновения пьезоостаточной намагниченности не сложно, если воспользоваться выражением критического поля

$$H_0 = I_s \sqrt{(k_A - k_\sigma)^2 + k_N^2 + 2k_N(k_A - k_\sigma) \cos \psi},$$

где $k_\sigma = 2\lambda_3\sigma$. Так как напряжения приводят к смещению центра линии постоянного критического поля на диаграмме $[k_N, \psi]$ вдоль направления $\psi = \pi$ на величину $\pm k_\sigma$ относительно точки $k_N = k_A$ (знак плюс соответствует сжимающим, минус — растягивающим напряжениям). Таким образом, для расчёта $I_{r\pm}^{\perp}(\sigma_+ H_+ H_0 \sigma_0)$ можно пользоваться выражением для нормальной остаточной намагниченности $I_r(H)$, заменив k_A на $k_A \pm k_\sigma$.

Так, например, при $H \ll k_A I_s$, $k_\sigma \ll k_A$, следуя решению задачи 5, имеем:

$$I_{r\pm}^{\perp}(\sigma_+ H_+ H_0 \sigma_0) = \frac{cH^2}{6k_0(k_A \pm k_\sigma)I_s} = I_r(H) \left(1 \mp \frac{k_\sigma}{k_A} \right). \quad (7.1)$$

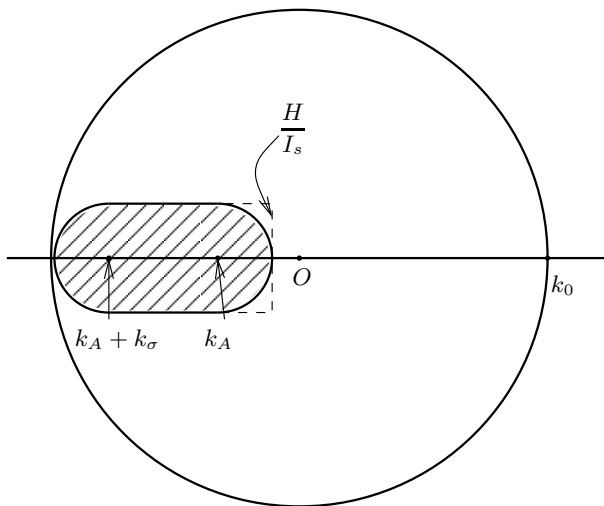


Рис. 8. Заштрихованная область соответствует пьезоостаточной намагниченности $I_r^\perp(H_+\sigma_+\sigma_0H_0)$. Пунктиром обозначена область, используемая для приближенного расчёта.

Задача 8. Решить задачу 6 считая, что напряжения перпендикулярны полю H .

Если напряжения прикладываются и снимаются в присутствии поля H , то возникает пьезоостаточная намагниченность $I_r^\perp(H_+\sigma_+\sigma_0H_0)$, механизм образования которой аналогичен рассмотренному в задаче 6 механизму образования $I_r^\parallel(H_+\sigma_+\sigma_0H_0)$. Если воспользоваться диаграммой $[k_N, \psi]$ (см. рис. 8), то намагниченность

$$I_{r+}^\perp(H_+\sigma_+\sigma_0H_0) = \frac{cH^2}{6k_0(k_A + k_\sigma)I_s} + \int \frac{cI_s}{3\pi k_0 k_A} k_N dk_N d\psi. \quad (8.1)$$

Интеграл в (8.1) берётся по площади прямоугольника высотой H/I_s и длиной k_σ . Учитывая, что $H \ll k_A I_s$ и $k_\sigma \ll k_A$, заменим $d\psi = H/(k_N I_s)$. После интегрирования в приближении слабых полей и напряжений ($H \ll k_A I_s$, $k_\sigma \ll k_A$) $I_r^\perp(H_+\sigma_+\sigma_0H_0)$ по k_N от k_A до $k_A + k_\sigma$ выражение (8.1) переходит в

$$I_{r\pm}^\perp(H_+\sigma_+\sigma_0H_0) = I_r(H) \left(1 \mp \frac{k_\sigma}{k_A} \right) + \frac{ck_\sigma}{3\pi k_0 k_A}. \quad (8.2)$$

Задача 9. Оценить влияние слабой наведённой анизотропии k_u ($k_u \ll \ll k_A$) на остаточную намагниченность ансамбля сферических однодоменных невзаимодействующих частиц.

Для оценки влияния наведённой анизотропии на намагниченность ансамбля однодоменных частиц воспользуемся соотношениями, определяющими эффективную константу анизотропии \mathcal{K} , положение эффективной оси δ и критическое поле H_0 . Полагая, что преимущественными видами магнитной анизотропии являются одноосная кристаллографическая (k_A) и наведённая (k_u) имеем:

$$\mathcal{K} = \sqrt{k_\sigma^2 + k_A^2 + 2k_A k_\sigma \cos 2\alpha}, \quad (9.1)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k_\sigma \sin 2\alpha}{k_A + k_\sigma \cos 2\alpha}, \quad (9.2)$$

$$H_0 = \mathcal{K} I_s \left\{ \cos^{2/3} \theta + \sin^{2/3} \theta \right\}^{-3/2}. \quad (9.3)$$

Здесь α — угол между осями, выделяемыми наведённой и кристаллографической анизотропией, θ — угол между полярной осью и вектором \mathbf{I}_s .

Следуя определению критического поля, нетрудно понять, что из всей совокупности N невзаимодействующих частиц необратимый поворот магнитного момента реализуется лишь для тех зёрен, критические поля которых меньше внешнего поля \mathbf{H} ($H_0 \leq H$), а магнитные моменты \mathbf{m} составляют с вектором \mathbf{H} тупой угол ($-1 \leq \cos(\widehat{\mathbf{m}}, \mathbf{H}) < 0$). Согласно формуле (9.3), условию $H_0 \leq H$ удовлетворяют зёрна, эффективные оси которых образуют с полем угол θ , лежащий в пределах $\pi + \tilde{\theta} \leq \theta \leq 3\pi/2 - \tilde{\theta}$, где угол $\tilde{\theta}$ имеет вид

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{2H}{KI_s} \left[\frac{(KI_s/H)^2 - 1}{3} \right]^{3/2} \right\}, \quad (9.4)$$

Таким образом, проекция вектора остаточной намагниченности на произвольное направление \mathbf{l} определяется следующим интегралом:

$$I_{rl}(H, k_u) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\tilde{\theta}}^{\pi/2 - \tilde{\theta}} \frac{1}{2V} N 2m \cos p F(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (9.5)$$

здесь V — объём, занимаемый системой, p — угол между магнитным моментом \mathbf{m} и направлением \mathbf{l} , $F(\theta, \varphi)$ — функция распределения эффективных осей относительно магнитного поля \mathbf{H} .

Рассмотрим частный случай поставленной задачи — оценим проекцию намагниченности $I_r^{\parallel}(H, k_u)$ на направление поля \mathbf{H} , параллельного оси выделяемой слабой наведённой анизотропией ($k_u \ll k_A$). В этом приближении слабой наведённой анизотропии ($k_\sigma \ll k_A$) $\delta = k_u \sin 2\alpha / (2k_A)$, а эффективная ось ориентируется относительно «оси k_u » под углом

$$\theta = \alpha - \delta = \alpha - \frac{k_u}{2k_A} \sin 2\alpha. \quad (9.6)$$

При известном распределении по α функция распределения $F(\theta, \varphi)$ может быть найдена следующим образом:

$$F(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha, \beta) \delta[\theta - Y(\alpha)] \delta[\varphi - z(\beta)] d\alpha d\beta, \quad (9.7)$$

где α и β — полярный и азимутальный углы, определяющие положение оси кристаллографической анизотропии относительно «оси k_u », $Y(\alpha)$ — задаётся соотношением (9.6), $z(\beta) = \beta$. Заменяв переменные $\alpha \rightarrow Y$, $\beta \rightarrow z$

$$\begin{cases} \alpha = Y + \frac{k_u}{2k_A} \sin 2Y, \\ \beta = z, \end{cases} \quad (9.8)$$

а также считая распределение по α и β хаотическим $f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \sin \alpha$, приходим к выражению, которое определяет функцию анизотропного распределения «лёгких осей» относительно оси наведённой анизотропии:

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{4\pi} \left[1 + \frac{k_u}{k_A} (3 \cos^2 \theta - 1) \right]. \quad (9.9)$$

Используя (9.9), несложно оценить $I_r^{\parallel}(H, k_u)$

$$I_r^{\parallel}(H, k_u) = I_r(H, k_u) \left(1 + \frac{k_u}{2k_A} \right). \quad (9.10)$$

Здесь

$$I_r(H, k_u) = \begin{cases} 0, & H \leq k_A I_s / 2, \\ c I_s / 2 \cos 2\tilde{\theta}, & \\ c I_s / 2, & H \geq k_A I_s \end{cases}$$

— остаточная намагниченность, не зависящая от ориентации «оси k_u »,

$$\sin 2\tilde{\theta} = \sin 2\tilde{\theta}_0 \left[1 - \frac{k_u}{k_A} \left(\frac{2+x^2}{1-x^2} \right) \cos 2\theta_0 \right], \quad (9.11)$$

$$\sin 2\tilde{\theta}_0 = \frac{2}{x^2} \left[\frac{1-x^2}{3} \right]^{\frac{3}{2}}, \quad x = \frac{H}{k_A I_s}.$$

Соотношения (9.11), определяющие предельный угол $\tilde{\theta}$, являются решением (9.4) в приближении $k_u \ll k_A$ ($\alpha = \theta + (k_u/(2k_A)) \sin 2\theta$; $K = k_A + k_u \cos 2\theta$). Расчёт влияния наведённой анизотропии на остаточную намагниченность в случае несовпадения направления поля \mathbf{H} с «осью k_u » проводится аналогичным образом.

Для оценки проекции намагниченности $I_{rl}(H, k_u)$ на произвольное направление \mathbf{l} рассмотрим сферическую систему координат, полярная ось которой совпадает с вектором внешнего поля \mathbf{H} . Если θ' и φ' ; ω и ε ; ψ и ξ — полярные и азимутальные углы, определяющие положения «эффективной оси», «оси k_u » и единичного вектора \mathbf{l} соответственно, то в выбранной системе координат

$$F(\theta', \varphi') = \frac{\sin \theta'}{4\pi} \left[1 + \frac{k_u}{k_A} (3 \cos^2 \theta - 1) \right], \quad (9.12)$$

где $\cos \theta = \cos \theta' \cos \omega + \sin \theta' \sin \omega \cos(\varphi' - \varepsilon)$,

$$\cos p = \cos \theta' \cos \psi + \sin \theta' \sin \psi \cos(\varphi' - \xi). \quad (9.13)$$

Соотношение (9.12) может быть получено следующим образом: так как при повороте сферической системы координат элемент сферической поверхности единичного радиуса в «старой» и «новой» системе одинаков $\sin \theta d\theta d\varphi = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$, то при переходе в «новую» систему координат преобразуется лишь плотность распределения осей на единичной поверхности сферы $\frac{1}{4\pi} \left[1 + \frac{k_u}{k_A} (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$.

Интегрирование (9.5) с учётом (9.12), (9.13), приводит к следующему выражению для остаточной намагниченности:

$$I_{rl}(H, k_u) = I_r(H, k_u) \left[1 + \frac{k_u}{2k_A} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \omega + \frac{3}{2} \sin 2\omega \operatorname{tg} \psi \cos(\varepsilon - \xi) \right) \right] \cos \psi. \quad (9.14)$$

Из (9.14) видно, что проекция намагниченности $I_r^\perp(H, k_u)$ на направление поля \mathbf{H} , приложенного перпендикулярно оси наведённой анизотропии

$$I_r^\perp(H, k_u) = I_r(H, k_u) \left(1 - \frac{k_u}{4k_A} \right) \quad (9.15)$$

меньше $I_r^{\parallel}(H, k_u)$.

Кроме того, как показывает исследование (9.14) на экстремум в направлении \mathbf{l} , определяемом углами

$$\xi_m = \varepsilon, \quad \psi_m = \frac{3k_u}{4k_A} \sin 2\omega \quad (9.16)$$

намагниченность $I_{rl}(H, k_u)$ достигает максимального значения

$$I_{rl}^{(\max)}(H, k_u) = I_r(H, k_u) \left(1 - \frac{k_u}{2k_A} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \omega \right) \right), \quad (9.17)$$

которое, в силу малости угла ψ , совпадает с проекцией намагниченности на направление поля \mathbf{H} ($I_{rl}(H, k_u, \psi = 0)$). Следовательно, наведённая анизотропия, ориентированная под углом к полю \mathbf{H} , приводит как к отклонению вектора остаточной намагниченности от направления выделяемого полем \mathbf{H} , так и к изменению его величины.

Задача 10. *Оценить влияние слабой наведённой анизотропии k_u на начальную восприимчивость сферических однодоменных невзаимодействующих частиц.*

Для оценки начальной восприимчивости χ проведём расчёт индуктивной намагниченности $I(H)$, возникающей в малых полях $H \ll k_A I_s$. Образование этой намагниченности связано с отклонением магнитного момента каждого зерна от эффективной оси на угол γ , который можно оценить, минимизируя энергию

$$E = \frac{1}{2} K I_s^2 \sin^2 \gamma - H I_s \cos(\theta' - \gamma), \quad (10.1)$$

где первый член в (10.1) представляет суммарную энергию анизотропии (в приближении $k_u \ll k_A$, $K = k_A + k_u \cos 2\theta$), второй — энергию магнитного момента зерна во внешнем поле H . Учитывая малость H , получаем, что

$$\gamma = \frac{H \sin \theta'}{k_A I_s} \left(1 - \frac{k_u}{k_A \cos 2\theta} \right). \quad (10.2)$$

Дальнейший расчёт несложен: проекция вектора $\mathbf{I}(H)$ на направление \mathbf{l} равна

$$I_l(H, k_u) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{Nm}{V} \cos p F(\theta', \varphi') d\theta' d\varphi', \quad (10.3)$$

где

$$\cos p = \cos(\theta' - \gamma) \cos \psi + \sin(\theta' - \gamma) \sin \psi \cos(\varphi' - \xi),$$

а $F(\theta', \varphi')$ задаётся соотношением (9.12) (полярная ось, так же как и при оценке остаточной намагниченности, выбирается параллельно полю \mathbf{H}).

Интегрируя (10.3), приходим к следующему выражению начальной восприимчивости $\chi_l = I_l/H$, измеряемой в направлении 1:

$$\chi_l = \chi_0 \left\{ 1 + \frac{k_u}{k_A} \left[\frac{1 + \sin^2 \omega}{5} + \sin 2\omega \operatorname{tg} \psi \cos(\varepsilon - \xi) \right] \right\} \cos \psi. \quad (10.4)$$

Здесь $\chi_0 = 2c/(3k_A)$ — «изотропная» начальная восприимчивость системы однодоменных не взаимодействующих частиц.

Таким образом, наведённая анизотропия приводит к увеличению начальной восприимчивости, причём восприимчивость χ^{\parallel} , измеряемая в направлении поля, приложенного параллельно «оси k_u » ($\psi = 0, \omega = 0$)

$$\chi^{\parallel} = \chi_0 \left(1 + \frac{k_u}{5k_A} \right), \quad (10.5)$$

меньше χ^{\perp} ($\psi = 0, \omega = \pi/2$)

$$\chi^{\perp} = \chi_0 \left(1 + \frac{2k_u}{5k_A} \right). \quad (10.6)$$

В том случае, когда магнитное поле ориентировано под углом оси наведённой анизотропии ($0 < \omega < \pi/2$), начальная восприимчивость достигает максимума

$$\chi_l^{(\max)} = \chi_0 \left(1 + \frac{k_u}{5k_A} (1 + \sin^2 \omega) \right) \quad (10.7)$$

в направлении

$$\xi_m = \varepsilon, \quad \psi_m = \frac{2k_u}{k_A} \sin 2\omega. \quad (10.8)$$

Задача 11. Используя решения задач 8–11 [1] найти намагниченность системы не взаимодействующих двухфазных частиц при $T \neq 0$.

Рассмотрим ансамбль одинаковых не взаимодействующих малых двухфазных частиц, находящийся во внешнем поле H при некоторой температуре T . В силу малости объёма частиц можно ожидать, что за счёт тепловых флуктуаций магнитных моментов фаз могут быть реализованы переходы из одного состояния в другое в поле H , меньшем любого критического из критических полей (11.2)–(11.7) [1].

Переориентация магнитного момента одной из фаз определяется высотой потенциального барьера E_{ik} , разделяющего i -ое и k -ое состояния.

Будем считать, что частота перехода из i -го в k -ое состояние выражается через E_{ik} следующим образом:

$$W_{ik} = f_0 \exp\left(-\frac{E_{ik}}{k_B T}\right), \quad (11.1)$$

где $f_0 \sim 10^7 \div 10^{10} \text{ с}^{-1}$ — характерная частота «попыток» преодоления потенциального барьера, которая далее везде полагается равной 10^{10} с^{-1} , k_B — постоянная Больцмана, $E_{ik} = F_{ik \max} - F_{i \min}$, где $F_{i \min}$ — свободная энергия равновесного i -го состояния, в котором находилась частица перед переходом, $F_{ik \max}$ — максимальное значение свободной энергии, разделяющее i -ое и k -ое состояния. Например, при $H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} > 0$

$$\begin{aligned} E_{12} &= F\left(\theta_1 = 0, \theta_2 = \arccos\left[-\frac{H\varepsilon + N_{21}I_{s1}}{a_2 I_{s1}}\right]\right) - F(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0) = \\ &= \frac{\varepsilon^2 \left(H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} + H\right)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})} qa^3. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Если $H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} \leq 0$, то, как отмечалось выше, « $(\uparrow\uparrow)$ -состояние» не реализуется, и задача нахождения W_{12} может быть сведена к задаче о случайных блужданиях единичного вектора по сфере, решением которой в первом приближении является $W_{12} = f_0 \exp(-2H\varepsilon I_{s2} qa^3 / (k_B T))$. Аналогичным образом можно рассчитать E_{ik} для одиннадцати оставшихся переходов:

$$\mathcal{E}_{14} = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)^2 \left(H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} + H\right)^2}{2(k_1(1-\varepsilon) + 2N_{11})}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} > -H; \\ 2H(1-\varepsilon)I_{s1}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} < -H; \end{cases} \quad (11.3)$$

$$\mathcal{E}_{41} = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)^2 \left(H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} - H\right)^2}{2(k_1(1-\varepsilon) + 2N_{11})}, & H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} > H; \\ -2H(1-\varepsilon)I_{s1}, & H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} < H; \end{cases} \quad (11.4)$$

$$\mathcal{E}_{34} = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2 \left(H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} - H\right)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} > H; \\ -2H\varepsilon I_{s2}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} < H; \end{cases} \quad (11.5)$$

$$\mathcal{E}_{21} = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2 \left(H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} - H\right)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})}, & H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} > H; \\ -2H\varepsilon I_{s2}, & H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} < H; \end{cases} \quad (11.6)$$

$$\mathcal{E}_{32} = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)^2 (H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} - H)^2}{2(k_1(1-\varepsilon) + 2N_{11})}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} > H; \\ -2H(1-\varepsilon)I_{s1}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} < H; \end{cases} \quad (11.7)$$

$$\mathcal{E}_{23} = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)^2 (H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} + H)^2}{2(k_1(1-\varepsilon) + 2N_{11})}, & H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} > -H; \\ 2H(1-\varepsilon)I_{s1}, & H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} < -H; \end{cases} \quad (11.8)$$

$$\mathcal{E}_{43} = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2 (H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} + H)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})}, & H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} > -H; \\ 2H\varepsilon I_{s2}, & H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} < -H; \end{cases} \quad (11.9)$$

$$\mathcal{E}_{13} = \begin{cases} \frac{(H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} + H)^2 (I_{s1}(1-\varepsilon) + I_{s2}\varepsilon)}{2H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}}, & H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} > -H; \\ 2H(I_{s1}(1-\varepsilon) + I_{s2}\varepsilon), & H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} < -H; \end{cases} \quad (11.10)$$

$$\mathcal{E}_{31} = \begin{cases} \frac{(H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} - H)^2 (I_{s1}(1-\varepsilon) + I_{s2}\varepsilon)}{2H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}}, & H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} > H; \\ -2H(I_{s1}(1-\varepsilon) + I_{s2}\varepsilon), & H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} < H; \end{cases} \quad (11.11)$$

$$\mathcal{E}_{24} = \begin{cases} \frac{(H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} - H)^2 |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|}{2H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)}}, & H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} > H, & \varepsilon > \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ -2H |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|, & H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} < H, & \varepsilon > \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ \frac{(H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} + H)^2 |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|}{2H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)}}, & H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} > -H, & \varepsilon < \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ 2H |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|, & H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} < -H, & \varepsilon < \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \end{cases} \quad (11.12)$$

$$\mathcal{E}_{42} = \begin{cases} \frac{\left(H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} - H\right)^2 |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|}{2H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)}}, & H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} > H, & \varepsilon < \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ -2H |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|, & H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} < H, & \varepsilon < \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ \frac{\left(H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} + H\right)^2 |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|}{2H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)}}, & H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} > -H, & \varepsilon > \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ 2H |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|, & H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} < -H, & \varepsilon > \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}. \end{cases} \quad (11.13)$$

Здесь $\mathcal{E}_{ik} = \frac{E_{ik}}{qa^3}$.

Введём нормированный на единицу вектор заселённости $\mathbf{n}(t) = \{N_1(t), N_2(t), N_3(t), N_4(t)\}$. Если начальное состояние ансамбля двухфазных частиц $\mathbf{n}_0 = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ неравновесно, то переход к равновесию можно рассматривать как марковский процесс с дискретными состояниями, который описывается системой из четырёх уравнений:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{k \neq i}^4 (-W_{ik}N_i + W_{ki}N_k), \quad (11.14)$$

с начальными условиями $n_i(t=0) = n_i$, ($i, k = 1, \dots, 4$). Используя условие нормировки:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1, \quad (11.15)$$

и, исключив из (11.14) N_4 , перепишем систему (11.14) в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{N} + \mathbf{V}, \quad (11.16)$$

$\widetilde{\mathbf{W}}$ — матрица, коэффициенты которой выражаются через W_{ik} следующим образом:

$$\widetilde{W}_{ik} = \begin{cases} -\sum_{j \neq i}^4 W_{ij} - W_{4i}, & i = k, \\ W_{ki} - W_{4i}, & i \neq k, \end{cases} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \quad (11.17)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} W_{41} \\ W_{42} \\ W_{43} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_0 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (11.16) удобно записать с помощью матричной экспоненты (см. Приложение I):

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}_0 \exp(\widetilde{\mathbf{W}}t) + \int_0^t \exp(\widetilde{\mathbf{W}}(t - \tau)) d\tau \cdot \mathbf{V}. \quad (11.18)$$

Соотношения (11.1)–(11.18) при известном векторе начального состояния \mathbf{n}_0 полностью определяют заселённость магнитных состояний ансамбля двухфазных частиц.

При известных заселённостях N_i несложно рассчитать намагничённость ансамбля двухфазных частиц:

$$I = c[(N_1 - N_3)(I_{s1}(1 - \varepsilon) + I_{s2}\varepsilon) + (N_2 - N_4)(I_{s1}(1 - \varepsilon) - I_{s2}\varepsilon)], \quad (11.19)$$

где c — объёмная концентрация частиц в немагнитной матрице.

Приложение I. *Выражение матричной экспоненты через матрицу переходов.*

Для решения задачи, условие которой вынесено в заглавие данного приложения, воспользуемся интерполяционным многочленом Сильвестра-Лагранжа, который в случае отсутствия кратных собственных значений матрицы \mathbf{W} $\lambda_0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$ имеет вид

$$r(\lambda) = \sum \exp(\lambda_i t) \frac{\prod_{i \neq k} (\lambda - \lambda_i)}{\prod_{i \neq k} (\lambda_i - \lambda_k)}. \quad (I.1)$$

$$\exp(\mathbf{W}t) = \sum_{k=0}^2 \exp(\lambda_k t) \frac{\prod_{i \neq k} (\mathbf{W} - \lambda_i \mathbf{E})}{\prod_{i \neq k} (\lambda_i - \lambda_k)}, \quad (I.2)$$

$$\int_0^t \exp[\mathbf{W}(t - \tau)] d\tau = \sum_{k=0}^2 \varphi(\lambda_k, t) \frac{\prod_{i \neq k} (\mathbf{W} - \lambda_i \mathbf{E})}{\prod_{i \neq k} (\lambda_i - \lambda_k)}. \quad (I.3)$$

Здесь \mathbf{E} — единичная матрица.

Если \mathbf{W} имеет два кратных собственных значения, например $\lambda_i = \lambda_k \neq \lambda_m$, то

$$r(\lambda) = \left[\frac{\alpha}{\lambda - \lambda_k} + \frac{\beta}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \frac{\gamma}{(\lambda - \lambda_m)} \right] \psi(\lambda), \quad (I.4)$$

где $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)(\lambda - \lambda_m^2)$ — минимальный многочлен,

$$\alpha = \left[\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} (\lambda - \lambda_k) \right]_{\lambda=\lambda_k} = \frac{\exp(\lambda_k t)}{(\lambda_k - \lambda_m)^2},$$

$$\beta = \left[\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} (\lambda - \lambda_k)^2 \right]_{\lambda=\lambda_m} = \frac{\exp(\lambda_m t)}{\lambda_k - \lambda_m},$$

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} (\lambda - \lambda_k)^2 \right]_{\lambda=\lambda_m} = \frac{[t(\lambda_m - \lambda_k) - 1] \exp(\lambda_m t)}{(\lambda_k - \lambda_m)^2}$$

и

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{W}t) &= \frac{(\mathbf{W} - \lambda_k \mathbf{E})^2}{(\lambda_m - \lambda_k)^2} [\exp(\lambda_m t) - \exp(\lambda_k t) (1 + (\lambda_m - \lambda_k)t)] + \\ &\quad + (\mathbf{W} - \lambda_k \mathbf{E})t \exp(\lambda_k t) + \mathbf{E} \exp(\lambda_k t), \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp[\mathbf{W}(t - \tau)] d\tau &= \frac{(\mathbf{W} - \lambda_k \mathbf{E})^2}{(\lambda_m - \lambda_k)^2} [\varphi_1(\lambda_m, t) - \varphi_1(\lambda_k, t) - \\ &\quad - \varphi_2(\lambda_k, t)(\lambda_m - \lambda_k)] + (\mathbf{W} - \lambda_k \mathbf{E})\varphi_2(\lambda_k, t) + \mathbf{E}\varphi_1(\lambda_k, t). \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

В случае трёх кратных собственных значений ($\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$), $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$,

$$r(\lambda) = \left[\frac{\alpha}{(\lambda - \lambda_1)^3} + \frac{\beta}{(\lambda - \lambda_1)^2} + \frac{\gamma}{\lambda - \lambda_1} \right] \psi(\lambda), \quad (\text{I.7})$$

$$\alpha = [r(\lambda)]_{\lambda=\lambda_1} = \exp(\lambda_1 t),$$

$$\beta = \frac{\partial}{\partial \lambda} [r(\lambda)]_{\lambda=\lambda_1} = t \exp(\lambda_1 t),$$

$$\gamma = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [\exp(\lambda_1 t) (\lambda - \lambda_1)^2]_{\lambda=\lambda_1} = \frac{1}{2} t^2 \exp(\lambda_1 t)$$

и

$$\exp(\mathbf{W}t) = \left[\frac{1}{2} (\mathbf{W} - \lambda_1 \mathbf{E})^2 t^2 + (\mathbf{W} - \lambda_1 \mathbf{E})t + \mathbf{E} \right] \exp(\lambda_1 t), \quad (\text{I.8})$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp[\mathbf{W}(t - \tau)] d\tau &= \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \lambda_1 \mathbf{E})^2 \varphi_3(\lambda_1, t) + \\ &\quad + (\mathbf{W} - \lambda_1 \mathbf{E})^2 \varphi_2(\lambda_1, t) + \mathbf{E}\varphi_1(\lambda_1, t). \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Здесь

$$\varphi_1(y, t) = \frac{1}{y} [\exp(yt) - 1],$$

$$\varphi_2(y, t) = \frac{1}{y} [t \exp(yt) - \varphi_1(y, t)],$$

$$\varphi_3(y, t) = \frac{1}{y} [t^2 \exp(yt) - 2\varphi_2(y, t)].$$

Список литературы

1. Афремов Л. Л., Панов А. В. Задачи по электродинамике сплошных сред. Магнетики. — Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2005. — 18 с.

Учебное издание

Афремов Леонид Лазаревич
Панов Андрей Валентинович

**ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
СПЛОШНЫХ СРЕД. НАМАГНИЧЕННОСТЬ
НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ**

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная вёрстка: А. В. Панов

Подписано в печать 05.03.05.
Формат $60 \times 84^{1/16}$. Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд. л. 1,1.
Тираж 100 экз.

Издательство Дальневосточного университета
690950, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27

Отпечатано в Институте физики
и информационных технологий ДВГУ
690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8