

Л. Л. Афремов, А. В. Панов

---

**ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ  
СПЛОШНЫХ СРЕД.  
МАГНЕТИКИ**

Владивосток  
Издательство Дальневосточного университета  
2005

ББК 22.334

А 94

Афремов Л. Л., Панов А. В.

А 94 **Задачи по электродинамике сплошных сред. Магнетики.** — Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2005. — 18 с.

В методическом пособии приведены задачи по электродинамике сплошных сред. Представлены задачи к разделу «Магнетики», посвящённые изучению состояний однородных и неоднородных по химическому составу однодоменных частиц.

Рекомендуется студентам физических специальностей.

А  $\frac{1704040000}{180(03) - 05}$

ББК 22.334

© Афремов Л. Л., 2005

© Панов А. В., 2005

**Задача 1.** Определить магнитные состояния кристаллографически одноосной сферической частицы, находящейся во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ .

Сохраним в разложении плотности энергии анизотропии одноосного кристалла по степеням вектора спонтанной намагниченности квадратичное слагаемое

$$\mathcal{E}_A = \frac{1}{2} \beta_{ik} I_{si} I_{sk}, \quad (1.1)$$

где  $\beta_{ik}$  — безразмерный симметричный тензор второго ранга, компоненты которого являются функциями температуры,  $I_{sk}$  — компоненты вектора спонтанной намагниченности  $\{I_{s1}, I_{s2}, I_{s3}\}$ , по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование.

Учитывая, что в случае одноосного кристалла тензор  $\beta_{ik}$  в своих главных осях имеет вид

$$\beta_{ik} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix}, \quad \beta_{11} = \beta_{22} \quad (1.2)$$

и что  $I_{s1}^2 + I_{s2}^2 + I_{s3}^2 = I_s^2$ , выражение (1.1) можно переписать так:

$$\mathcal{E}_A = \frac{1}{2} (\beta_{11} - \beta_{33}) (I_{s1}^2 + I_{s2}^2) + \frac{1}{2} \beta_{33} I_s^2 = \frac{1}{2} k_A I_s^2 \sin^2 \theta + \mathcal{E}(I_s^2), \quad (1.3)$$

где  $\theta$  — угол между вектором  $\mathbf{I}_s$  и осью  $Oz$ , выбранной вдоль главной оси симметрии кристалла,  $\mathcal{E}(I_s^2)$  — часть энергии, не зависящая от ориентации  $\mathbf{I}_s$ .

Выражение (1.3) позволяет записать плотность энергии одноосного, однородно намагниченного кристалла, находящегося в поле  $\mathbf{H}$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(I_s^2) + \frac{1}{2} k_A I_s^2 \sin^2 \theta - (H_1 \sin \theta + H_3 \cos \theta) I_s, \quad (1.4)$$

система координат выбрана так, что поворот вектора совершается в плоскости  $xOz$ .

Зависимость намагниченности от поля  $H$  определяется условием равновесия  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta} = 0$ :

$$k_A I_s \sin \theta \cos \theta = H_1 \cos \theta - H_3 \sin \theta. \quad (1.5)$$

По отношению к неизвестной  $\xi = \sin \theta$  (1.5) является алгебраическим уравнением четвёртой степени  $(k_A I_s \xi - H_1)^2 (1 - \xi^2) = H_3^2 \xi^2$  с отличными от нуля коэффициентами при нечётных степенях  $\xi$ . Поэтому оно имеет либо

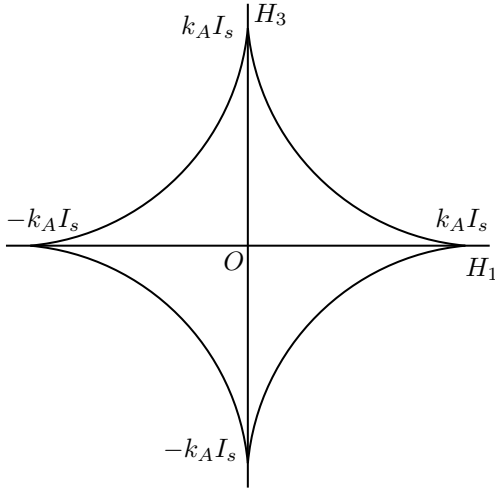


Рис. 1. В области, ограниченной астроидой, возможны стабильные и метастабильные магнитные состояния, вне этой области — только стабильные.

два, либо четыре вещественных корня. Поскольку все эти корни соответствуют экстремумам энергии, в первом случае для данного значения поля возможно одно направление вектора  $\mathbf{I}_s$ , во втором — два различных направления  $\mathbf{I}_s$ , из которых одно (соответствующее меньшему из минимумов  $\mathcal{E}$ ) термодинамически устойчиво, а второе (соответствующее большему из минимумов  $\mathcal{E}$ ) метастабильно. При непрерывном изменении  $H_1$  и  $H_3$ , минимальное значение энергии, соответствующие метастабильному состоянию, сравнивается с одним из максимальных, при этом кривая  $\mathcal{E}(\theta)$  имеет вместо экстремума точку перегиба, то есть вместе с  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta} = 0$  обращается в нуль также и вторая производная  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \theta^2}$ :

$$k_A I_s \cos 2\theta = -H_1 \sin \theta - H_3 \cos \theta. \quad (1.6)$$

Исключая  $\theta$  из уравнений (1.5), (1.6), нетрудно получить:

$$H_1^{2/3} + H_3^{2/3} = (k_A I_s)^{2/3}. \quad (1.7)$$

На диаграмме  $(H_1, H_3)$ , уравнение (1.7) определяет кривую (астроиду), которая делит плоскость  $H_1 O H_3$  на две части, из которых во внутренней возможно, а во внешней невозможно существование метастабильных состояний (см. рис. 1). Эта кривая и определяет критическое поле, при котором происходит необратимый поворот вектора  $\mathbf{I}_s$  в зависимости от угла

$\varphi$  между «лёгкой осью» и приложенным полем  $\mathbf{H}$ , т. е.:

$$H_0 = k_A I_s \left\{ \cos^{2/3} \varphi + \sin^{2/3} \varphi \right\}^{-3/2}. \quad (1.8)$$

**Задача 2.** Определить магнитные состояния кристаллографически одноосной частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения. Считать, что главные оси тензоров кристаллографической анизотропии  $\beta_{ik}$  и анизотропии формы  $N_{ik}$  не совпадают, а константы анизотропий  $k_A = \beta_{33} - \beta_{11}$  и  $k_N = N_{33} - N_{11}$  — положительны.

Рассмотрим плотность энергий анизотропии одноосного однородно намагниченного зерна, имеющего форму эллипсоида вращения, в пренебрежении всеми видами анизотропии, кроме естественной кристаллографической и анизотропии формы. Плотность энергии анизотропии можно записать так:

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_0(I_s^2) + \frac{1}{2}\beta_{ik}I_{si}I_{sk} + \frac{1}{2}N_{ik}I_{si}I_{sk}, \quad (2.1)$$

по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование,  $\beta_{ik}$  и  $N_{ik}$  — тензоры естественной кристаллографической анизотропии и разматничивающих коэффициентов соответственно, которые в своих главных осях имеют вид

$$\beta_{ik} \sim \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix}, \quad \beta_{22} = \beta_{33}; \quad N_{ik} \sim \begin{pmatrix} N'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & N'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N'_{33} \end{pmatrix}, \quad N'_{22} = N'_{33}; \quad (2.2)$$

В общем случае главные оси тензоров  $\beta_{ik}$  и  $N_{ik}$  не совпадают, однако легко показать, что системы координат  $(x, y, z)$  и  $(x', y', z')$ , связанные с главными осями  $\beta_{ik}$  и  $N_{ik}$  (см. рис. 2), могут быть совмещены поворотом вокруг общей оси  $z, z'$  на некоторый угол  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ). Используя известный закон преобразования компонент тензора при повороте осей, в системе  $(x, y, z)$  суммарный тензор можно записать

$$B_{ik} = \beta_{ik} + N'_{ik} = \begin{pmatrix} B_{11} & (N'_{11} - N'_{22})\frac{\sin 2\alpha}{2} & 0 \\ (N'_{11} - N'_{22})\frac{\sin 2\alpha}{2} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} + N'_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$B_{11} = \beta_{11} + N'_{11} \cos^2 \alpha + N'_{22} \sin^2 \alpha,$$

$$B_{22} = \beta_{22} + N'_{11} \sin^2 \alpha + N'_{22} \cos^2 \alpha,$$

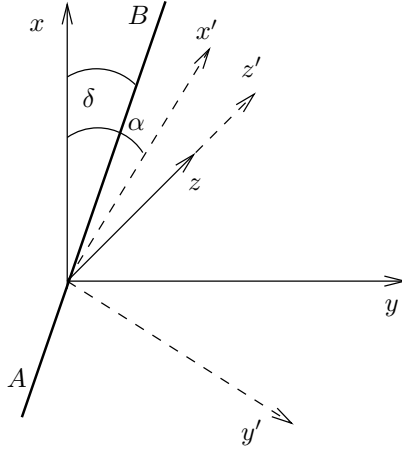


Рис. 2. Координатные системы  $(x, y, z)$  и  $(x', y', z')$  связаны с главными осями тензоров  $\beta_{ik}$  и  $N_{ik}$ , эффективная ось  $AB$  составляет с осью  $Ox$  угол  $\delta$ .

что позволяет представить (2.1) в следующем виде:

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_0(I_s^2) + \frac{1}{2}B_{ik}I_{si}I_{sk}. \quad (2.4)$$

Просуммировав в соотношении (2.4) по индексам  $i$  и  $k$ , нетрудно получить следующее выражение для плотности энергии анизотропии:

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_0(I_s^2) - \frac{1}{4}I_s^2 \sin^2 \theta \{k_A + k_N + K \cos 2(\varphi - \delta)\}. \quad (2.5)$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $\theta$  — угол между вектором  $\mathbf{I}_s$  и осью  $z$ ,  $\varphi$  — между проекцией вектора  $\mathbf{I}_s$  на плоскость  $xOy$  и осью  $x$ ,  $k_A = \beta_{22} - \beta_{11}$ ,

$$\delta = \frac{1}{2} \arctg \frac{k_N \sin 2\alpha}{k_A + k_N \cos 2\alpha}, \quad (2.6)$$

$$K = \sqrt{k_A^2 + k_N^2 + 2k_A k_N \cos 2\alpha}. \quad (2.7)$$

Исследование выражения (2.5) на экстремум показывает, что  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \delta$  и  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi + \delta$  соответствуют минимуму, а  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi/2$ ;  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 3\pi/2 + \delta$  — максимуму энергии анизотропии  $\mathcal{E}_A$ .

Таким образом, «конкуренция» кристаллографической анизотропии и анизотропии формы приводит к выделению в плоскости  $xOy$  оси равновесного положения вектора  $\mathbf{I}_s$  под углом  $\delta$  к оси  $Ox$ .

**Задача 3.** Обобщить решение задачи 2 на случай, когда частица находится во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Рассмотреть два взаимодополняющих варианта:

- 1) поле  $\mathbf{H}$  параллельно плоскости, содержащей ось кристаллографической анизотропии и длинную ось эллипсоида;
- 2) поле перпендикулярно описанной выше плоскости.

Для определения магнитного момента равновесных состояний зерна в поле  $\mathbf{H}$  необходимо исследовать на минимум плотность энергии

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_A - (\mathbf{H}, \mathbf{I}_s). \quad (3.1)$$

При произвольной ориентации вектора  $\mathbf{H}$  невозможно получить решение в аналитической форме. Однако, на примере двух частных случаев ( $\mathbf{H}$  параллельно плоскости  $xOy$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярно этой плоскости) можно оценить пределы изменения критического поля  $H_0$ .

Если  $\mathbf{H}$  параллельно плоскости  $xOy$ , то анализ на минимум выражения (3.1) приводит к задаче о равновесных состояниях однородно намагниченного сферического зерна с эффективной константой  $K$ , «лёгкая ось» которого составляет угол  $\delta$  с  $Ox$ . Критическое поле в этом случае определяется формулой (1.8) с заменой в ней  $k_A$  на  $K$ .

$$H_0 = KI_s \left\{ \cos^{2/3} \varphi + \sin^{2/3} \varphi \right\}^{-3/2}. \quad (3.2)$$

Полученный результат замечателен тем, что в системе однодоменных частиц, имеющих различные  $k_N$  и  $\alpha$ , существует спектр критических полей. Кроме того, из всего набора частиц с фиксированным углом  $\alpha$ , частицы, для которых выполняется условие  $k_N = -k_A \cos 2\alpha$ , обладают минимальным критическим полем  $H_0 = k_A I_s \sin 2\alpha$ .

Во втором случае ( $\mathbf{H}$  перпендикулярно плоскости  $xOy$ ) условию минимума энергии соответствуют  $\varphi = \delta, \pi + \delta, \cos \theta = \frac{2H}{(k_A + k_N + K)I_s}$ , если  $H < I_s(k_A + k_N + K)/2$  и  $\varphi = \delta, \pi + \delta, \theta = 0$ , если  $H \geq I_s(k_A + k_N + K)/2$ , так что поле

$$H_0 = \frac{1}{2}(k_A + k_N + K)I_s \quad (3.3)$$

можно назвать критическим полем обратимого поворота магнитного момента зерна, так как при уменьшении  $H$  до 0 вектор  $\mathbf{I}_s$  установится вдоль «лёгкой оси». Поэтому при расчёте остаточной намагниченности необходимо пользоваться соотношением (3.2). Тем более, что в системе частиц с различными  $k_N$  и  $\alpha$  критическое поле (3.2) может меняться от  $I_s(k_A + k_N)$  до  $I_s(k_A + k_N)/2$ , в то время как поле, определяемое формулой (3.3) — от

$H_0 = I_s(k_A + k_N)/2$  до  $H_0 = I_s(k_A + k_N)$ . То есть, в области слабых полей реализуются повороты первого типа.

**Задача 4.** В продолжение задачи 3 исследовать магнитные состояния частицы в зависимости от знака констант кристаллографической анизотропии и анизотропии формы.

Если  $k_A \geq 0$ ,  $k_N \leq 0$ , то формулы (2.5)–(2.7) примут вид

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4}I_s^2 \sin^2 \theta \{k_A - k_N + K \cos 2(\varphi - \delta)\} - (\mathbf{H}, \mathbf{I}_s), \quad (4.1)$$

$$K = \sqrt{k_A^2 + k_N^2 - 2k_A k_N \cos 2\alpha}, \quad (4.2)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k_N \sin 2\alpha}{k_A - k_N \cos 2\alpha}, \quad (4.3)$$

где  $k_N$  представляет собой абсолютное значение константы анизотропии формы.

Анализ выражения (4.1) показывает, что в отсутствие внешнего поля  $\mathbf{H}$  равновесные положения магнитного момента определяются также, как и при  $k_A > 0$ ,  $k_N > 0$ :  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \delta$ ;  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi + \delta$ . В магнитном поле, направленном вдоль такой эффективной «лёгкой оси», критическое поле  $H_0$ , определяемое как внешнее поле, при достижении которого магнитный момент зерна переходит из метастабильного состояния в устойчивое, может быть найдено по формуле

$$H_0 = \frac{1}{2}I_s (k_A - k_N + K). \quad (4.4)$$

Если частицы вытянуты, а  $k_A \leq 0$ , то в связи с симметричностью формул (2.5)–(2.7) относительно  $k_A$  и  $k_N$  критическое поле можно определить следующим образом:

$$H_0 = \frac{1}{2}I_s (k_N - k_A + K), \quad (4.5)$$

где  $K$  определяется соотношением (4.2),  $k_A$  — абсолютное значение безразмерной константы кристаллографической анизотропии,  $\alpha$  — угол между нормалью к «лёгкой плоскости» ( $k_A \leq 0$ ) и длинной осью эллипсоида.

И, наконец, рассмотрим частицы с  $k_A \leq 0$ ,  $k_N \leq 0$ . Обозначив через  $k_A$  и  $k_N$  абсолютные значения константы анизотропии, преобразуем выражение для плотности энергии магнитного момента зерна  $\mathcal{E}$  к виду:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4}I_s^2 \sin^2 \theta \{k_N + k_A + K \cos 2(\varphi - \delta)\} - (\mathbf{H}, \mathbf{I}_s). \quad (4.6)$$

Здесь  $K$  и  $\delta$  определяются соотношениями (2.6). Из (4.6) следует, что при  $H = 0$  минимуму энергии анизотропии соответствуют углы  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ ; эффективная «лёгкая ось» оказывается на пересечении «лёгких плоскостей», выделяемых анизотропией формы и естественной кристаллографической анизотропией. Необратимое изменение ориентации  $\mathbf{I}_s$  происходит во внешнем поле  $H = H_0$ , где

$$H_0 = \frac{1}{2} I_s \left( k_A + k_N - \sqrt{k_A^2 + k_N^2 + 2k_A k_N \cos 2\alpha} \right). \quad (4.7)$$

**Задача 5.** Исследовать влияние механических напряжений на магнитные состояния кристаллографически одноосной частицы, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения.

Плотность энергии однодоменного зерна, находящегося под действием механических напряжений, может быть записана в следующем виде

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}(I_s^2) + \frac{1}{2} \beta_{ik} I_{sk} I_{si} + \frac{1}{2} N_{ik} I_{sk} I_{si} + \lambda_{iklm} \sigma_{il} I_{sk} I_{sm}, \quad (5.1)$$

где  $\lambda_{iklm}$  — тензор магнитострикционных коэффициентов,  $\sigma_{il}$  — тензор напряжений; по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование.

Для одноосного кристалла магнитоупругая часть плотности энергии может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma = & -\lambda_1 \sigma_{11} I_{s1}^2 + \lambda_2 (\sigma_{22} I_{s2}^2 + \sigma_{33} I_{s3}^2) + (\lambda_2 + \lambda_3) \sigma_{23} I_{s2} I_{s3} - \\ & - \lambda_3 (\sigma_{22} I_{s3}^2 + \sigma_{33} I_{s2}^2) - \lambda_4 (\sigma_{13} I_{s1} I_{s3} + \sigma_{12} I_{s1} I_{s2}). \end{aligned}$$

В двух частных случаях, когда напряжения параллельны плоскости  $(k_A, k_N)$ , в которой лежат длинная ось зерна эллипсоидальной формы и ось кристаллографической анизотропии, составляя с последней угол  $\beta$  (случай *a*), и напряжения перпендикулярны плоскости  $(k_A, k_N)$  (случай *б*), можно получить следующие выражения для плотности энергии:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A = \mathcal{E}(I_s^2) - \frac{1}{4} I_s^2 \sin^2 \theta \{ & K \cos 2(\varphi - \delta) + k_A + k_N + \\ & + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)\sigma + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)\sigma \cos 2\beta \}, \quad (5.2) \end{aligned}$$

где  $k_A = \beta_{22} - \beta_{11}$ ,  $k_N = N_{22} - N_{11}$ ,

$$\begin{aligned} K = \{ & [k_A + k_N \cos 2\alpha + (\lambda_1 + \lambda_2)\sigma + (\lambda_1 - \lambda_2)\sigma \cos 2\beta]^2 + \\ & + [k_N \sin 2\alpha + \lambda_4 \sigma \sin 2\beta]^2 \}^{1/2}, \quad (5.3) \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k_N \sin 2\alpha + \lambda_4 \sigma \sin 2\beta}{k_A + k_N \cos 2\alpha + (\lambda_1 + \lambda_2)\sigma + (\lambda_1 - \lambda_2)\sigma \cos 2\beta}, \quad (5.4)$$

$\alpha$  — угол между длинной осью эллипсоида и осью, выделяемой кристаллографической анизотропией,  $\theta$  и  $\varphi$  — сферические координаты вектора  $\mathbf{I}_s$  (за отсчёт принята ось, выделяемая кристаллографической анизотропией ( $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ )).

б)

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}(I_s^2) - \frac{1}{4} I_s^2 \sin^2 \theta \{K \cos 2(\varphi - \delta) + k_A + k_N + 2(\lambda_3 + 2\lambda_2)\sigma\}, \quad (5.5)$$

$$K = \sqrt{(k_A - 2\lambda_3\sigma)^2 + 2(k_A - 2\lambda_3\sigma)k_N \cos 2\alpha + k_N^2}, \quad (5.6)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k_N \sin 2\alpha}{k_A + k_N \cos 2\alpha - 2\lambda_3\sigma}. \quad (5.7)$$

Исследуя на минимум плотность энергии  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A - (\mathbf{H}, \mathbf{I}_s)$ , можно установить следующее:

1. Если  $|\sigma| < \sigma_1$ , то критическое поле, необходимое для необратимого поворота вектора  $\mathbf{I}_s$  из состояния «против поля» в состояние «по полю», определяется эффективной константой анизотропии:  $K$  (см. формулы (5.3), (5.6)):  $H_0 = KI_s$ .

2. Если  $|\sigma| > \sigma_1$ , то критическое поле

$$H_0 = \frac{1}{2} |I_s| \{K + k_A + k_N + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)\sigma_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)\sigma_1 \cos 2\beta\},$$

причём при  $\sigma_1 < |\sigma| < \sigma_2$  и  $H = 0$  вектор  $I_s$  лежит в плоскости  $(k_A, k_N)$  с координатами  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \delta$  (или  $\pi + \delta$ ). Напряжениями  $|\sigma| > \sigma_2$  магнитный момент зерна может «выталкиваться» из плоскости  $(k_A, k_N)$ , ориентируясь перпендикулярно ей. Параметры  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} -K(\sigma_1) + k_A + k_N + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)\sigma_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)\sigma_1 \cos 2\beta &= 0, \\ K(\sigma_2) + k_A + k_N + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)\sigma_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)\sigma_2 \cos 2\beta &= 0, \end{aligned}$$

если напряжения параллельны плоскости  $(k_A, k_N)$ , и

$$\begin{aligned} -K(\sigma_1) + k_A + k_N + 2(\lambda_3 + 2\lambda_2)\sigma_1 &= 0, \\ K(\sigma_2) + k_A + k_N + 2(\lambda_3 + 2\lambda_2)\sigma_2 &= 0, \end{aligned}$$

если напряжения перпендикулярны  $(k_A, k_N)$ .

3. В зависимости от приложенных напряжений возможно немонотонное изменение критического поля  $H_0 = KI_s$ . Так, например, в случае (а) критическое поле достигает минимума  $H_{0\min} = k_N I_s \sin(2\alpha - \psi_0)$  при

$$\sqrt{[k_A + (\lambda_1 + \lambda_2)\sigma + (\lambda_1 - \lambda_2)\sigma \cos 2\beta]^2 + [\lambda_4\sigma \sin 2\beta]^2} = -k_N \cos(2\alpha - \psi_0),$$

где

$$\psi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_4\sigma \sin 2\beta}{k_A + (\lambda_1 + \lambda_2)\sigma + (\lambda_1 - \lambda_2)\sigma \cos 2\beta};$$

в случае (б) критическое поле становится минимальным  $H_{0\min} = k_N I_s \cdot \sin 2\alpha$  при  $k_A - 2\lambda_3\sigma = -k_N \cos 2\alpha$ .

**Задача 6.** Рассчитать магнитное поле, создаваемое двухфазным сферическим зерном радиуса  $R$ , в котором одна фаза занимает область  $0 \leq r \leq \rho$ , другая  $\rho < r \leq R$ . Спонтанные намагниченности областей  $I_{s1}$  и  $I_{s2}$  считать известными.

Запишем уравнения магнитостатики, определяющие поведение поля  $\mathbf{H}^{(m)}$  в объёме зерна,

$$\nabla \mathbf{H}^{(m)} = -4\pi \nabla \mathbf{I} \quad (6.1)$$

и на его границах —

$$H_{1\tau}^{(m)} = H_{2\tau}^{(m)}; \quad H_{1n}^{(m)} + 4\pi I_n^{(1)} = H_{2n}^{(m)} + 4\pi I_n^{(2)}. \quad (6.2)$$

Уравнения магнитостатики (6.1) и (6.2) можно представить следующим образом:

$$\Delta \Phi_{(1,2,3)} = 0 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\rho) = \Phi_2(\rho), \quad -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + 4\pi(I_{s1})_n \Big|_{r=\rho} &= -\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + 4\pi(I_{s2})_n \Big|_{r=\rho}, \\ -\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + 4\pi(I_{s2})_n \Big|_{r=R} &= -\frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad \Phi_2(R) = \Phi_3(R). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь  $\mathbf{H}^{(m)} = -\nabla \Phi$ , а индексы 1, 2, 3 нумеруют области  $0 \leq r < \rho$ ,  $\rho < r \leq R$  и  $r > R$  соответственно.

Используя общее решение уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ r^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^{n+1}} (c_{nm} \cos m\varphi + d_{nm} \sin m\varphi) \right\} P_n^{(m)}, \quad (6.5) \end{aligned}$$

а также учитывая конечность потенциала при  $r = 0$  и на бесконечности  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ , можно показать, что решением системы уравнений (6.3) (6.4) является

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1^{(m)} &= -\frac{4\pi}{3}\mathbf{I}^{(1)}, \\ \mathbf{H}_2^{(m)} &= -\frac{4\pi}{3}\mathbf{I}^{(2)} + \frac{1}{r^3} \left[ \frac{3(\mathbf{m}', \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{m}' \right], \\ \mathbf{H}_3^{(m)} &= \frac{1}{r^3} \left[ \frac{3(\mathbf{m}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{m} \right],\end{aligned}\tag{6.6}$$

где  $\mathbf{m}' = \frac{4\pi}{3}R^3(1 - \varepsilon)(\mathbf{I}^{(1)} - \mathbf{I}^{(2)})$ ,  $\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3}R^3(\varepsilon\mathbf{I}^{(1)} + (1 - \varepsilon)\mathbf{I}^{(2)})$ ,  $\varepsilon = \frac{R^3 - \rho^3}{R^3}$  — относительный объём внешней фазы.

**Задача 7.** Решить задачу 6 при условии, что зерно находится в однородном внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ .

Решение данной задачи аналогично решению задачи 6, то есть представляет собой решение уравнений (6.3), (6.4) при условиях  $\Phi(0) = 0$ ,  $-\nabla\Phi(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= \mathbf{H}_1^{(m)}(\mathbf{H}) + \mathbf{H}, \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{H}_2^{(m)}(\mathbf{H}) + \mathbf{H}, \\ \mathbf{H}_3 &= \mathbf{H}_3^{(m)}(\mathbf{H}) + \mathbf{H},\end{aligned}$$

где  $\mathbf{H}_i^{(m)}$  — выражения магнитного поля, определяемые соотношениями (6.6), в которых  $\mathbf{I}^{(1)} = \mathbf{I}^{(1)}(\mathbf{H})$  и  $\mathbf{I}^{(2)} = \mathbf{I}^{(2)}(\mathbf{H})$  — определяются из условия равновесия магнитного момента в магнитном поле.

**Задача 8.** Рассчитать энергию магнитоэлектростатического взаимодействия двухфазного зерна, состоящего из двух кристаллографически одноосных однородно намагниченных ферромагнетиков, имеющих форму параллелепипеда с основанием  $\varepsilon a \times a$  и  $(1 - \varepsilon)a \times a$  и высотой  $qa$ . Ферромагнитные фазы характеризуются следующими параметрами:  $\mathbf{I}_{s1}$  и  $\mathbf{I}_{s2}$  — спонтанные намагниченности,  $k_1$ ,  $k_2$  — безразмерные константы кристаллографической анизотропии,  $(1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  — относительные объёмы фаз соответственно. Считать, что вектора  $\mathbf{I}_{s1}$  и  $\mathbf{I}_{s2}$  расположены в одной плоскости с совпадающими осями кристаллографической анизотропии фаз, составляя углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно.

Магнитоэлектростатическую энергию зерна можно рассматривать как энергию взаимодействия магнитных зарядов с поверхностной плотностью

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \int_S \int_{S'} \frac{(\mathbf{I}_s(\mathbf{r}) d\mathbf{S})(\mathbf{I}_s(\mathbf{r}') d\mathbf{S}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (8.1)$$

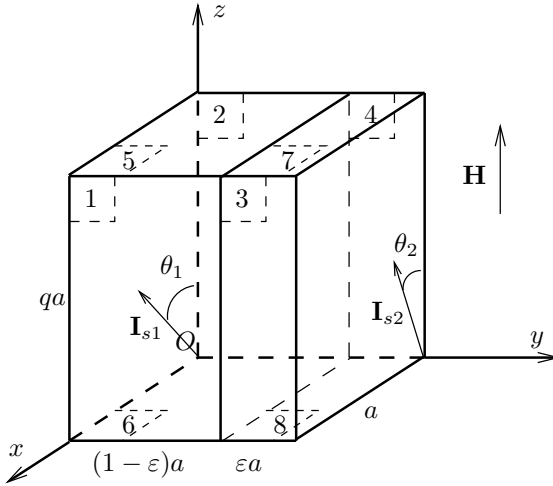


Рис. 3. Иллюстрация к модели двухфазной частицы.

Используя симметрию задачи перепишем (8.1) в следующем виде:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^8 \int_{S_i} \int_{S_k} \frac{(\mathbf{I}_s(\mathbf{r}_i) d\mathbf{S}_i)(\mathbf{I}_s(\mathbf{r}_k) d\mathbf{S}_k)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}, \quad (8.2)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — координаты точек поверхности  $S_i$  (см. рис. 3)

Так как компоненты векторов намагниченности первой и второй фазы выражаются через направляющие косинусы  $\mathbf{I}_{s1}\{I_{s1} \sin \theta_1, 0, I_{s1} \cos \theta_1\}$ ,  $\mathbf{I}_{s2}\{I_{s2} \sin \theta_2, 0, I_{s2} \cos \theta_2\}$ , то

$$\mathcal{E}_m = N_{11}I_{s1}^2 \sin^2 \theta_1 + N_{22}I_{s2}^2 \sin^2 \theta_2 + N_{12}I_{s1}I_{s2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 + N_{21}I_{s1}I_{s2} \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad (8.3)$$

где

$$N_{11} = \frac{4}{q} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} (1-\varepsilon-y) [f_1(y) - f_2(y)] dy + \frac{1}{2} (1-q) (1-\varepsilon)^2 \left[ \ln(1-\varepsilon) - \frac{3}{2} \right] \right\},$$

$$N_{22} = \frac{4}{q} \left\{ \int_0^\varepsilon (\varepsilon-y) [f_1(y) - f_2(y)] dy + \frac{1}{2} (1-q) \varepsilon^2 \left[ \ln \varepsilon - \frac{3}{2} \right] \right\},$$

$$N_{12} = \frac{4}{q} \left[ \int_0^\varepsilon f_1(y) y dy + \varepsilon \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f_1(y) y dy + \int_{1-\varepsilon}^1 (1-y) f_1(y) y dy \right] + 2 \left[ \varepsilon^2 \ln \varepsilon + (1-\varepsilon)^2 \ln(1-\varepsilon) + 3\varepsilon(1-\varepsilon) \right],$$

$$N_{21} = \frac{4}{q} \left[ \int_0^\varepsilon f_2(y) y dy + \varepsilon \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f_2(y) y dy + \int_{1-\varepsilon}^1 (1-y) f_2(y) y dy \right] + \frac{2}{q} \left[ \varepsilon^2 \ln \varepsilon + (1-\varepsilon)^2 \ln(1-\varepsilon) + 3\varepsilon(1-\varepsilon) \right],$$

$$f_1(y) = q \ln \frac{(\sqrt{q^2 + y^2} + q) \sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 + q^2 + y^2} + q} + \sqrt{1 + q^2 + y^2} + |y| - \sqrt{1 + y^2} - \sqrt{q^2 + y^2},$$

$$f_2(y) = q \ln \frac{(\sqrt{1 + y^2} + 1) \sqrt{q^2 + y^2}}{\sqrt{1 + q^2 + y^2} + 1} + \sqrt{1 + q^2 + y^2} + |y| - \sqrt{1 + y^2} - \sqrt{q^2 + y^2}.$$

**Задача 9.** Найти выражение для свободной энергии описанной в задаче 8 двухфазной частицы, находящейся во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$  при  $T = 0$ .

Рассмотрим частицу, состоящую из двух кристаллографически одноосных однородно намагниченных ферромагнетиков и имеющую форму параллелепипеда с основанием  $a^2$  и высотой  $qa$  (см. рис. 3). Ферромагнитные области (фазы) характеризуются следующими параметрами:  $\mathbf{I}_{s1}$  и  $\mathbf{I}_{s2}$  —

спонтанные намагниченности,  $k_1, k_2$  — безразмерные константы кристаллографической анизотропии,  $(1 - \varepsilon), \varepsilon$  — относительные объёмы первой и второй фаз соответственно. Для простоты будем считать, что вектора  $I_{s1}$  и  $I_{s2}$  расположены в плоскости  $xOz$ , оси кристаллографической анизотропии обоих ферромагнетиков параллельны оси  $Oz$ . Частица помещена во внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}$ , направленное вдоль оси  $Oz$ .

В принятом приближении свободную энергию зерна  $F$ , находящегося во внешнем поле  $H$  при нулевой абсолютной температуре ( $T = 0$ ), можно представить в виде суммы энергии кристаллографической анизотропии

$$E_a = \frac{1}{2} (k_1 I_{s1}^2 (1 - \varepsilon) \sin^2 \theta_1 + k_2 I_{s2}^2 \varepsilon \sin^2 \theta_2) qa^3, \quad (9.1)$$

энергии взаимодействия магнитного момента с собственным магнитным полем

$$E_m = (N_{11} I_{s1}^2 \sin^2 \theta_1 + N_{22} I_{s2}^2 \sin^2 \theta_2 + N_{12} I_{s1} I_{s2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 + N_{21} I_{s1} I_{s2} \cos \theta_1 \cos \theta_2) qa^3, \quad (9.2)$$

энергии обменного взаимодействия через границу, которая может быть задана в виде:

$$E_{ex} = -\frac{2A_{in}}{\delta a} \cos(\theta_1 - \theta_2) qa^3, \quad (9.3)$$

и энергии взаимодействия магнитного момента с внешним магнитным полем

$$E_H = -H (I_{s1} (1 - \varepsilon) \cos \theta_1 + I_{s1} \varepsilon \cos \theta_1) qa^3. \quad (9.4)$$

В соотношениях (9.2), (9.3)  $N_{ik}$  — размагничивающие коэффициенты, определяемые формой и относительными размерами фаз (см. задачу 8),  $A_{in}$  — обменная константа,  $\delta$  — ширина переходной области, имеющая порядок постоянной решётки.

**Задача 10.** Исследовать магнитные состояния описанной выше двухфазной частицы.

Воспользовавшись стандартной процедурой минимизации свободной энергии  $F = E_a + E_m + E_{ex} + E_H$  по  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , получим систему уравнений, определяющих равновесные состояния магнитного момента зерна:

$$\begin{cases} a_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + N_{12}^* j \cos \theta_1 \sin \theta_2 - N_{21}^* j \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \frac{H}{I_{s1}} (1 - \varepsilon) \sin \theta_1 = 0, \\ a_2 j \cos \theta_2 \sin \theta_2 + N_{12}^* \cos \theta_2 \sin \theta_1 - N_{21}^* \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \frac{H}{I_{s1}} \varepsilon \sin \theta_2 = 0, \end{cases} \quad (10.1)$$

где  $a_1 = 2N_{11} + k_1(1 - \varepsilon)$ ,  $a_2 = 2N_{22} + k_2\varepsilon$ ,  $j = I_{s2}/I_{s1}$ ,  $N_{12}^* = N_{12} - A^*$ ,  
 $N_{21}^* = N_{21} - A^*$ ,  $A^* = \frac{2A_{in}}{\delta a I_{s1} I_{s2}}$ .

Нетрудно убедиться, что при  $H = 0$ , спектр решений системы (10.1) состоит из трёх групп:

1)  $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = 0$ ,

2)  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 0$ ,

3)  $\cos \theta_1 = \pm \sqrt{\frac{(a_1 b - N_{21}^*)^2 - j^2 b^2 (N_{12}^*)^2}{(a_1 b - N_{21}^*)^2 - (N_{12}^*)^2}}$ ,  $\cos \theta_2 = \pm \frac{\cos \theta_1}{j b}$ ,

где

$$b = \frac{a_1 a_2 + (N_{21}^*)^2 - (N_{12}^*)^2 \pm \sqrt{(a_1 a_2 + (N_{21}^*)^2 - (N_{12}^*)^2)^2 - 4a_1 a_2 (N_{21}^*)^2}}{2a_1 (N_{21}^*)^2}.$$

Первая группа решений соответствует минимуму свободной энергии, вторая — максимуму  $F$ . Третья, не удовлетворяя условию экстремума, не реализуется в выбранной модели с «параллельной» взаимной ориентацией фаз.

Таким образом, в отсутствие внешнего магнитного поля двухфазная частица может находиться в одном из перечисленных ниже состояний:

*в первом* «(↑↑)-состоянии» магнитные моменты обеих фаз параллельны и направлены вдоль оси  $Oz$ ;

*во втором* «(↑↓)-состоянии» фазы намагничены антипараллельно, а магнитный момент первой фазы  $\mathbf{m}_1$  направлен по оси  $Oz$ ;

*третье* «(↓↓)-состояние» отличается от первого антипараллельной относительно оси  $Oz$  ориентацией намагниченностей фаз;

*в четвёртом* «(↓↑)-состоянии» магнитный момент второй фазы направлен вдоль, а первой — против оси  $Oz$ .

Если магнитостатическое взаимодействие между фазами преобладает над обменным ( $N_{21}^* > 0$ ), то первое и третье состояния метастабильны, так как свободная энергия зерна  $F = N_{21} I_{s1} I_{s2}$  в этих состояниях больше, нежели во втором и четвёртом, где  $F = -N_{21} I_{s1} I_{s2}$ . В противном случае ( $N_{21}^* < 0$ ) метастабильны второе и четвёртое состояния.

**Задача 11.** *Используя результаты задачи 10 исследовать магнитные состояния двухфазной частицы, находящейся в магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Считать, что поле  $\mathbf{H}$  параллельно оси кристаллографической анизотропии.*

Переходам, например, из третьего состояния во второе либо в четвёртое соответствует поворот магнитного момента одной из фаз, переходу в первое — полного момента зерна. Рассмотрим переход во второе состояние. Положив в первом уравнении системы (10.1)  $\theta_2 = \pi$ , и, считая, что

магнитное поле направлено вдоль оси  $Oz$ , приходим к двум типам решений:

$$1) \sin \theta_1 = 0, \quad 2) \cos \theta_1 = -\frac{H(1-\varepsilon) + N_{21}^* I_{s2}}{a_1 I_{s1}}, \quad (11.1)$$

которые при  $H < (a_1 I_{s1} - N_{21}^* I_{s2}) / (1 - \varepsilon)$  определяют основное ( $\theta_1 = 0$ ) и метастабильное ( $\theta_1 = \pi$ ) состояния, а также состояние с максимальным значением свободной энергии  $F$ . При  $H = k_1 I_{s1} + \frac{2N_{11} I_{s1} - N_{21}^* I_{s2}}{1 - \varepsilon}$  метастабильное состояние «исчезает», так как при  $\theta_1 = \pi$  и  $\theta_2 = \pi$   $F$  максимальна. Поэтому поле

$$H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} = k_1 I_{s1} + \frac{2N_{11} I_{s1} - N_{21}^* I_{s2}}{1 - \varepsilon} \quad (11.2)$$

определим как критическое, при котором совершается переход из третьего во второе состояние. Аналогичным образом можно определить критические поля перехода из третьего в четвёртое состояние:

$$H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} = k_2 I_{s2} + \frac{2N_{22} I_{s2} - N_{21}^* I_{s1}}{\varepsilon}, \quad (11.3)$$

из четвёртого состояния в первое:

$$H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} = k_1 I_{s1} + \frac{2N_{11} I_{s1} + N_{21}^* I_{s2}}{1 - \varepsilon}, \quad (11.4)$$

из второго в первое состояние:

$$H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} = k_2 I_{s2} + \frac{2N_{22} I_{s2} + N_{21}^* I_{s1}}{\varepsilon}, \quad (11.5)$$

из третьего состояния в первое:

$$H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} = \frac{a_1 I_{s1}^2 + a_2 I_{s2}^2 + 2(N_{12} - N_{21}) I_{s1} I_{s2}}{(1 - \varepsilon) I_{s1} + \varepsilon I_{s2}}, \quad (11.6)$$

из второго в четвёртое:

$$H_{c4}^{(\uparrow\downarrow)} = \frac{a_1 I_{s1}^2 + a_2 I_{s2}^2 - 2(N_{12} - N_{21}) I_{s1} I_{s2}}{|(1 - \varepsilon) I_{s1} - \varepsilon I_{s2}|}. \quad (11.7)$$

Учебное издание

**Афремов** Леонид Лазаревич  
**Панов** Андрей Валентинович

**ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ  
СПЛОШНЫХ СРЕД, МАГНЕТИКИ**

Учебное пособие

В авторской редакции  
Компьютерная вёрстка: А. В. Панов

Подписано в печать 05.03.05.  
Формат  $60 \times 84^{1/16}$ . Усл. печ. л. 0,8. Уч.-изд. л. 0,7.  
Тираж 100 экз.

Издательство Дальневосточного университета  
690950, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27

Отпечатано в Институте физики  
и информационных технологий ДВГУ  
690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8