ФММ, 1996, **82**, вып. 5, с. 5–16.
УДК 538.245

Теория намагниченности двухфазных суперпарамагнитных частиц. I. Магнитные состояния

Л. Л. Афремов, А. В. Панов

Проведен анализ магнитных состояний двухфазной частицы. Показано, что зерно может находиться в одном из четырех состояний. Рассчитаны критические поля перемагничивания. Разработана методика расчета заселенностей магнитных состояний ансамбля малых двухфазных частиц.

Предположение об однофазности (химической однородности) ферромагнитных зерен, лежащее в основе теоретических исследований магнитных свойств однодоменных или близких к ним по размерам частиц, является, скорее всего, упрощением, нежели соответствует действительности. В зависимости от технологии получения малых частиц их поверхность может быть покрыта окисью основного либо иного магнитного элемента [1-4]. Возможен и другой механизм образования многофазной магнитной системы - распад твердого раствора, в результате которого образуются соседствующие фазы с обогащенным и обедненным содержанием магнитного материала [5].

Естественно ожидать, что химическая неоднородность малых частиц может существенно повлиять на стабильность состояния с однородным распределением магнитного момента и изменить такие магнитные характеристики как величина магнитного момента и критическое поле перемагничивания.

Стабильности однородно намагниченного состояния частиц различной формы посвящены работы [6-8], в которых в рамках модели двухфазной квазиоднодоменной частицы с одноосной кристаллографической анизотропией, в

приближении достаточно тонкого поверхностного слоя, получено аналитическое выражение для критического поля образования веерной магнитной структуры. Там же показано, что появление низко- либо высокоанизотропного поверхностного слоя приводит к изменению намагниченности насыщения квазиоднодоменного зерна. Однако метод анализа критического поля перемагничивания, используемый авторами цитируемых работ, позволил выделить лишь основные состояния, соответствующие данному классу функций распределения магнитного момента. Метастабильные же состояния, оказались вне рамок исследования, хотя вполне естественно ожидать, что в двухфазной частице возможны состояния с параллельной и антипараллельной ориентацией магнитных моментов фаз. В зависимости от взаимного расположения фаз, вследствие их магнитостатического взаимодействия одно из состояний, если оно реализуемо, должно быть метастабильным, даже при сохранении однородности магнитных моментов фаз. Расширение спектра равновесных состояний с неизбежностью должно привести к особенностям в процессе намагничивания ансамбля малых частиц и отразиться на его магнитных свойствах.

В данной работе, предпринята попытка в рамках простой и наглядной модели исследовать процесс намагничивания ансамбля малых химически неоднородных частиц.

1. Модель двухфазной частицы

Рассмотрим частицу, состоящую из двух кристаллографически одноосных однородно намагниченных ферромагнетиков и имеющую форму параллелепипеда с основанием a^2 и высотой qa (см. рис. 1). Фазы характеризуются следующими параметрами: $\boldsymbol{I}_{S1}$ и $\boldsymbol{I}_{S2}$ – спонтанные намагниченности, k_1, k_2 – безразмерные константы кристаллографической анизотропии, (1-ε) , ε – относительные

объемы первой и второй фаз соответственно. Для простоты будем считать, что переходная область бесконечно тонкая, а вектора $\boldsymbol{I}_{S1}$ и $\boldsymbol{I}_{S2}$ расположены в плоскости XOZ, оси кристаллографической анизотропии обоих ферромагнетиков параллельны оси z. Частица помещена во внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}$, направленное вдоль оси z.

Исключим из рассмотрения обменное и магнитоупругое межфазное взаимодействия, что может быть более или менее обосновано лишь в случае сильно неупорядоченного распределения магнитных атомов в граничном слое [9,10].

В принятом приближении свободную энергию зерна F, находящегося во внешнем поле H при нулевой абсолютной температуре ($T = 0$), можно представить в виде суммы энергии кристаллографической анизотропии

$$E_a = \frac{1}{2}\left(k_1 I_{s1}^2 (1-\varepsilon)\sin^2\theta_1 + k_2 I_{s2}^2 \varepsilon \sin^2\theta_2\right), \qquad (1)$$

энергии взаимодействия магнитного момента с собственным магнитным полем

$$E_m = N_{11} I_{s1}^2 \sin^2\theta_1 + N_{22} I_{s2}^2 \sin^2\theta_2 + N_{12} I_{s1} I_{s2} \sin\theta_1 \sin\theta_2 + N_{21} I_{s1} I_{s2} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \qquad (2)$$

энергии взаимодействия магнитного момента с внешним магнитным полем

$$E_H = -H\left(I_{s1}(1-\varepsilon)\cos\theta_1 + I_{s2}\varepsilon\cos\theta_2\right). \qquad (3)$$

В соотношении (2) N_{ik} – размагничивающие коэффициенты, определяемые формой и относительными размерами фаз (см. Приложение I).

2. Равновесные состояния двухфазной частицы

Воспользовавшись стандартной процедурой минимизации свободной энергии $E = E_a + E_m + E_H$ по θ_1 и θ_2 получим систему уравнений, определяющих равновесные состояния магнитного момента зерна:

$$\begin{cases} a_1 \cos\theta_1 \sin\theta_1 + N_{12}\, j \cos\theta_1 \sin\theta_2 - N_{21} j \cos\theta_2 \sin\theta_1 + \dfrac{H}{I_{s1}}(1-\varepsilon)\sin\theta_1 = 0 \\ a_2\, j \cos\theta_2 \sin\theta_2 + N_{12} \cos\theta_2 \sin\theta_1 - N_{21} \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \dfrac{H}{I_{s2}}\varepsilon j^2 \sin\theta_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $a_1 = 2N_{11} + k_1(1-\varepsilon), \qquad a_2 = 2N_{22} + k_2\varepsilon, \quad j = I_{s1}/I_{s2}$.

Анализ решений системы (4) начнем со случая $H = 0$.

2.1. Равновесные состояния в отсутствии внешнего поля

Нетрудно убедиться, что при $H = 0$, спектр решений системы (4) состоит из трех групп: 1) $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = 0$, 2) $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 0$,

3) $\cos\theta_1 = \pm\sqrt{\dfrac{(a_1 b - N_{21})^2 - j^2 b^2 N_{12}^2}{(a_1 b - N_{21})^2 - N_{12}^2}}$, $\qquad \cos\theta_2 = \pm\dfrac{\cos\theta_1}{jb}$,

где $b = \dfrac{a_1 a_2 + N_{21}^2 - N_{12}^2 \pm \sqrt{(a_1 a_2 + N_{21}^2 - N_{12}^2)^2 - 4 a_1 a_2 N_{21}^2}}{2 a_1 N_{21}}$.

Первая группа решений соответствует минимуму свободной энергии, вторая − максимуму F, третья, не удовлетворяя условию экстремума, не реализуется при выбранной взаимной ориентации фаз.

Таким образом, в отсутствии внешнего магнитного поля двухфазная частица может находиться в одном из перечисленных ниже состояний:

в первом «(↑↑)−состоянии» магнитные моменты обеих фаз параллельны и направлены вдоль оси OZ;

во втором «(↑↓)−состоянии» фазы намагничены антипараллельно, а магнитный момент первой фазы $\boldsymbol{m}_1$ направлен по оси OZ;

третье «(↓↓)−состояние» отличается от первого антипараллельной относительно оси OZ ориентацией намагниченностей фаз;

в четвертом «(↓↑)−состоянии» магнитный момент второй фазы направлен вдоль, а первой против оси OZ.

Первое и третье состояния метастабильны, так как свободная энергия зерна $F^{(\uparrow\uparrow)} = F^{(\downarrow\downarrow)} = N_{21} I_{s1} I_{s2}$ в этих состояниях больше, нежели во втором и четвертом, где $F^{(\uparrow\downarrow)} = F^{(\downarrow\uparrow)} = -N_{21} I_{s1} I_{s2}$.

2.2. Равновесные состояния зерна во внешнем магнитном поле

Во внешнем магнитном поле ***H***, направленном вдоль оси OZ, все состояния, кроме первого метастабильны, но самое неустойчивое третье. Очевидно, что из третьего состояния возможны переходы во второе ($\uparrow\downarrow$), в четвертое ($\downarrow\uparrow$), либо в первое ($\uparrow\uparrow$) состояния. Двум первым переходам соответствует поворот магнитного момента одной из фаз, последнему – полного момента зерна. Рассмотрим переход во второе состояние. Положив в первом уравнении системы (4) $\theta_2 = \pi$, приходим к двум типам решений:

$$1)\ \sin\theta_1 = 0\ ,\ 2)\cos\theta_1 = -\frac{H(1-\varepsilon) + N_{21} I_{s2}}{a_1 I_{s1}}, \qquad (5)$$

которые при $H < (a_1 I_{s1} - N_{21} I_{s2})/(1-\varepsilon)$ определяют основное ($\theta_1 = 0$) и метастабильное ($\theta_1 = \pi$) состояния, а также состояние с максимальным значением свободной энергии F. При $H = k_1 I_{s1} + (2N_{11} I_{s1} - N_{21} I_{s2})/(1-\varepsilon)$ метастабильное состояние «исчезает», так как при $\theta_1 = \pi$ и $\theta_2 = \pi$ F максимальна. Поэтому поле

$$H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} = k_1 I_{s1} + \frac{2N_{11} I_{s1} - N_{21} I_{s2}}{1-\varepsilon} \qquad (6)$$

определим как критическое, при котором совершается переход из третьего во второе состояние. Аналогичным образом можно определить критические поля перехода из третьего в четвертое состояние:

$$H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} = k_2 I_{s2} + \frac{2N_{22} I_{s2} - N_{21} I_{s1}}{\varepsilon}, \qquad (7)$$

из третьего состояния в первое:

$$H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} = \frac{a_1 I_{s1}^2 + a_2 I_{s2}^2 + 2(N_{12} - N_{21}) I_{s1} I_{s2}}{(1-\varepsilon) I_{s1} + \varepsilon I_{s2}}, \qquad (8)$$

из четвертого состояния в первое:

$$H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} = k_1 I_{s1} + \frac{2N_{11}I_{s1} + N_{21}I_{s2}}{1-\varepsilon}, \qquad (9)$$

из второго в первое состояние:

$$H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} = k_2 I_{s2} + \frac{2N_{22}I_{s2} + N_{21}I_{s1}}{\varepsilon}, \qquad (10)$$

из второго в четвертое:

$$H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)} = \frac{a_1 I_{s1}^2 + a_2 I_{s2}^2 + 2(N_{21} - N_{12})I_{s1}I_{s2}}{\left|(1-\varepsilon)I_{s1} - \varepsilon I_{s2}\right|}. \qquad (11)$$

Критические поля переходов из первого состояния в третье $H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}$ и из четвертого во второе $H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}$ определяются соотношениями (8) и (11) соответственно.

2.3. Основные и метастабильные состояния двухфазной частицы

Из выражений (6) и (7) видно, что критические поля H_c могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Отрицательность H_c следует понимать как невозможность реализации «$(\uparrow\uparrow)$– или $(\downarrow\downarrow)$– состояний». Если частица оказалась в одном из них, то при $H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} \le 0$ она самопроизвольно переходит из $(\downarrow\downarrow)$–состояния во второе, или четвертое состояние ($H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} \le 0$). Вышесказанному можно дать простую геометрическую интерпретацию. Пусть ансамбль состоит из частиц, отличающихся размером фаз ε и вытянутостью q, тогда на фазовой плоскости $\{\varepsilon, q\}$ (см. рис. 2.) каждой частице можно сопоставить точку. Кривая, соответствующая условиям $H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)}(\varepsilon, q) = 0$ и $H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)}(\varepsilon, q) = 0$, разделяет фазовую плоскость на две части. Частицы, изображающие точки которых попали в область под кривой, могут находиться только в одном из состояний с антипараллельной ориентацией магнитных моментов фаз, − метастабильности нет. Точкам, расположенным выше кривой, соответствуют частицы, которые могут находиться как в основных, так и метастабильных состояниях.

Вполне понятно, что метастабильность зависит от соотношения между межфазным магнитостатическим взаимодействием и взаимодействием спиновых магнитных моментов с кристаллическим полем. С увеличением вытянутости зерна q интенсивность межфазного магнитостатического взаимодействия падает, что усиливает роль кристаллографической анизотропии, в одинаковой степени определяющей как параллельное, так и антипараллельное взаимное расположение намагниченностей фаз.

Проведенное выше исследование равновесных состояний двухфазной частицы позволяет перейти к изучению ансамбля таких частиц.

3. Распределение двухфазных частиц по состояниям

Рассмотрим ансамбль одинаковых невзаимодействующих двухфазных частиц, находящийся во внешнем поле $\boldsymbol{H}$ при некоторой температуре T. В силу малости объема частиц, можно ожидать, что за счет тепловых флуктуаций магнитных моментов фаз могут быть реализованы переходы из одного состояния в другое в поле H меньшем любого критического из рассмотренного выше спектра H_c (см. (11)–(16)).

3.1. Частота переходов из одного равновесного состояния в другое

Переориентация магнитного момента одной из фаз определяется высотой потенциального барьера E_{ik} разделяющего i-ое и k-ое состояния. Следуя [11] будем считать, что частота перехода из i-го в k-ое состояние выражается через E_{ik} следующим образом

$$W_{ik} = f_0 \exp\left(\frac{E_{ik} q a^3}{k_b T}\right) \qquad (12)$$

где $f_0 \sim 10^7\text{-}10^{10}$ *сек*$^{-1}$ - характерная частота «попыток» преодоления потенциаль-

ного барьера, k_b постоянная Больцмана, $E_{ik} = E_{k\max} - E_{i\min}$, где $E_{i\min}$ - свободная энергия равновесного состояния, в котором находилась частица перед переходом, $E_{k\max}$ - максимальное значение свободной энергии, разделяющее *i*-ое и *k*-ое состояния. Например, при $H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} > 0$

$$E_{12} = F\{\theta_1 = 0, \theta_2 = \arccos[-(H\varepsilon + N_{21}I_{s1})/a_2 I_s]\} - \\ - F\{\theta_1 = 0, \theta_2 = 0\} = \frac{\varepsilon^2 \left(H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} + H\right)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})} qa^3. \qquad (13)$$

Если $H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} \le 0$, то, как отмечалось выше, $(\uparrow\uparrow)$-состояние не реализуется, и задача нахождения W_{12} может быть сведена к задаче о случайных блужданиях единичного вектора по сфере, решением которой в первом приближении, является $W_{12} = f_0 \exp\left(-2H\varepsilon I_{s2} qa^3 / k_b T\right)$. Аналогичным образом можно рассчитать E_{ik} для одиннадцати оставшихся переходов (см. Приложение II), а, следовательно, и частоты W_{ik}.

3.2. Уравнение «движения» для вектора состояний и его решение

Введем нормированный на единицу вектор заселенности $N_i \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$. Если начальное состояние ансамбля двухфазных частиц $\boldsymbol{n_0} = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ неравновесно, то переход к равновесию можно рассматривать как марковский процесс с дискретными состояниями, который описывается системой из четырех уравнений

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{k \ne i}^{4} \left(-W_{ik} N_i + W_{ki} N_k\right) \qquad (14)$$

с начальными условиями $N_i(t = 0) = n_i$, $i, k = 1, \ldots 4$.

Используя условие нормировки

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \qquad (15)$$

и исключив из (14) N_4, перепишем систему (14) в матричной форме

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{dt} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{N} + \boldsymbol{V}\,. \tag{16}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} -(W_{12}+W_{13}+W_{14}+W_{41}) & W_{21}-W_{41} & W_{31}-W_{41} \\ W_{12}-W_{42} & -(W_{21}+W_{23}+W_{24}+W_{42}) & W_{32}-W_{42} \\ W_{13}-W_{42} & W_{23}-W_{43} & -(W_{31}+W_{32}+W_{34}+W_{43}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} W_{41} \\ W_{42} \\ W_{43} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Решение уравнения (16) удобно записать с помощью матричной экспоненты (см. Приложение III):

$$\boldsymbol{N}(t) = \exp(\boldsymbol{W}t)\boldsymbol{n}_0 + \int_0^t \exp(\boldsymbol{W}(t-\tau))\mathrm{d}\tau \cdot \boldsymbol{V}\,, \tag{18}$$

Соотношения (17)–(18) при известном векторе начального состояния $\boldsymbol{n}_0$ полностью определяют заселенность магнитных состояний ансамбля двухфазных частиц.

Приложение I

Магнитостатическая энергия двухфазного зерна

Магнитостатическую энергию зерна можно рассматривать как энергию взаимодействия магнитных зарядов с поверхностной плотностью

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2}\int_S\int_{S'} \frac{(\boldsymbol{I}_s(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}_s(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{S}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{I.1}$$

Используя симметрию задачи перепишем (I.1) в следующем виде:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{8}\int_{S_i}\int_{S_k} \frac{(\boldsymbol{I}_s(\boldsymbol{r}_i)d\boldsymbol{S}_i)(\boldsymbol{I}_s(\boldsymbol{r}_k)d\boldsymbol{S}_k)}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_k|}, \tag{I.2}$$

где $\boldsymbol{r}_i$– координаты точек поверхности S_i (см. рис. 1)

Так как компоненты векторов намагниченности первой и второй фазы вы-

ражаются через направляющие косинусы $\boldsymbol{I}_{s1}$ $\{I_{s1}\sin\theta_1,\ 0,\ I_{s1}\cos\theta_1\}$, $\boldsymbol{I}_{s2}$ $\{I_{s2}\sin\theta_2,\ 0,\ I_{s2}\cos\theta_2\}$, то

$$E_m = N_{11}I_{s1}^2\sin^2\theta_1 + N_{22}I_{s2}^2\sin^2\theta_2 + N_{12}I_{s1}I_{s2}\sin\theta_1\sin\theta_2 + N_{21}I_{s1}I_{s2}\cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{I.3}$$

где

$$N_{11} = \frac{4}{q}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}(1-\varepsilon-y)\left[f_1(y)-f_2(y)\right]dy + \frac{1}{2}(1-q)(1-\varepsilon)^2\left[\ln(1-\varepsilon)-\frac{3}{2}\right]\right\}$$

$$N_{22} = \frac{4}{q}\left\{\int_0^{\varepsilon}(\varepsilon-y)\left[f_1(y)-f_2(y)\right]dy + \frac{1}{2}(1-q)\varepsilon^2\left[\ln\varepsilon-\frac{3}{2}\right]\right\}$$

$$N_{12} = \frac{4}{q}\left[\int_0^{\varepsilon} f_1(y)ydy + \varepsilon\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_1(y)ydy + \int_{1-\varepsilon}^{1}(1-y)f_1(y)ydy\right] +$$

$$+ 2\left[\varepsilon^2\ln\varepsilon + (1-\varepsilon)^2\ln(1-\varepsilon) + 3\varepsilon(1-\varepsilon)\right]$$

$$N_{21} = \frac{4}{q}\left[\int_0^{\varepsilon} f_2(y)ydy + \varepsilon\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_2(y)ydy + \int_{1-\varepsilon}^{1}(1-y)f_2(y)ydy\right] +$$

$$+ \frac{2}{q}\left[\varepsilon^2\ln\varepsilon + (1-\varepsilon)^2\ln(1-\varepsilon) + 3\varepsilon(1-\varepsilon)\right]$$

$$f_1(y) = q\ln\left\{\frac{\left(\sqrt{q^2+y^2}+q\right)\sqrt{1+y^2}}{\left(\sqrt{1+q^2+y^2}+q\right)|y|}\right\} - \sqrt{q^2+y^2} +$$

$$+ \sqrt{1+q^2+y^2} - \sqrt{1+y^2} - |y| + q\ln y$$

$$f_2(y) = q\ln\left\{\frac{\left(\sqrt{1+y^2}+q\right)\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+q^2+y^2}\,|y|}\right\} - \sqrt{q^2+y^2} +$$

$$+ \sqrt{1+q^2+y^2} - \sqrt{1+y^2} - |y| + \ln y$$

Приложение II

Выражения для энергетических барьеров

$$E_{12}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon^2\left(H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)}+H\right)^2}{2\left(k_2\varepsilon+2N_{22}\right)}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)}>0;\\ 2H\varepsilon I_{s2}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)}<0;\end{cases} \tag{II.1}$$

$$E_{14}=\begin{cases}\dfrac{(1-\varepsilon)^2\left(H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)}+H\right)^2}{2\left(k_1(1-\varepsilon)+2N_{11}\right)}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)}>0;\\ 2H(1-\varepsilon)I_{s2}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)}<0;\end{cases} \tag{II.2}$$

$$E_{41}=\begin{cases}\dfrac{(1-\varepsilon)^2\left(H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)}-H\right)^2}{2\left(k_1(1-\varepsilon)+2N_{11}\right)}, & H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)}>H;\\ -2H(1-\varepsilon)I_{s2}, & H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)}<H;\end{cases} \tag{II.3}$$

$$E_{34}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon^2\left(H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)}-H\right)^2}{2\left(k_2\varepsilon+2N_{22}\right)}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)}>H;\\ -2H\varepsilon I_{s2}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)}<H;\end{cases} \tag{II.4}$$

$$E_{21}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon^2\left(H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)}-H\right)^2}{2\left(k_2\varepsilon+2N_{22}\right)}, & H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)}>H;\\ -2H\varepsilon I_{s2}, & H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)}<H;\end{cases} \tag{II.5}$$

$$E_{32}=\begin{cases}\dfrac{(1-\varepsilon)^2\left(H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)}-H\right)^2}{2\left(k_1(1-\varepsilon)+2N_{11}\right)}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)}>H;\\ -2H(1-\varepsilon)I_{s2}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)}<H;\end{cases} \tag{II.6}$$

$$E_{23}=\frac{(1-\varepsilon)^2\left(H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)}+H\right)^2}{2\left(k_1(1-\varepsilon)+2N_{11}\right)} \tag{II.7}$$

$$E_{43}=\frac{\varepsilon^2\left(H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)}+H\right)^2}{2\left(k_2\varepsilon+2N_{22}\right)} \tag{II.8}$$

$$E_{13}=\frac{\left(H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}+H\right)^2\left(I_{s1}(1-\varepsilon)+I_{s2}\varepsilon\right)}{2H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}} \tag{II.9}$$

$$E_{31}=\begin{cases}\dfrac{\left(H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}-H\right)^2\left(I_{s1}(1-\varepsilon)+I_{s2}\varepsilon\right)}{2H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}}, & H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}>H;\\ -2H\left(I_{s1}(1-\varepsilon)+I_{s2}\varepsilon\right), & H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}<H;\end{cases} \qquad \text{(II.10)}$$

$$E_{24}=\begin{cases}\dfrac{\left(H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}-H\right)^2\left|I_{s1}(1-\varepsilon)-I_{s2}\varepsilon\right|}{2H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}} & H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}>H,\varepsilon>\dfrac{I_{s1}}{I_{s1}+I_{s2}};\\ -2H\left|I_{s1}(1-\varepsilon)-I_{s2}\varepsilon\right| & H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}>H,\varepsilon>\dfrac{I_{s1}}{I_{s1}+I_{s2}};\\ \dfrac{\left(H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}+H\right)^2\left|I_{s1}(1-\varepsilon)-I_{s2}\varepsilon\right|}{2H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}}, & \varepsilon<\dfrac{I_{s1}}{I_{s1}+I_{s2}};\end{cases} \qquad \text{(II.11)}$$

$$E_{42}=\begin{cases}\dfrac{\left(H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}-H\right)^2\left|I_{s1}(1-\varepsilon)-I_{s2}\varepsilon\right|}{2H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}} & H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}>H,\varepsilon<\dfrac{I_{s1}}{I_{s1}+I_{s2}};\\ -2H\left|I_{s1}(1-\varepsilon)-I_{s2}\varepsilon\right| & H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}>H,\varepsilon<\dfrac{I_{s1}}{I_{s1}+I_{s2}};\\ \dfrac{\left(H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}+H\right)^2\left|I_{s1}(1-\varepsilon)-I_{s2}\varepsilon\right|}{2H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}}, & \varepsilon>\dfrac{I_{s1}}{I_{s1}+I_{s2}};\end{cases} \qquad \text{(II.12)}$$

Приложение III

Выражение матричной экспоненты через матрицу переходов

Для решения задачи, условие которой вынесено в заглавие данного приложения, воспользуемся интерполяционным многочленом Сильвестра–Лагранжа, который в случае отсутствия кратных корней матрицы ***W*** ($\lambda_0\neq\lambda_1\neq\lambda_2$) имеет вид:

$$r(\lambda)=\sum\exp(\lambda_k t)\frac{\prod_{i\neq k}(\lambda-\lambda_i)}{\prod_{i\neq k}(\lambda_i-\lambda_k)} \qquad \text{(III.1)}$$

Если ***W*** имеет два кратных корня, например $\lambda_0=\lambda_1\neq\lambda_2$, то

$$r(\lambda)=\left[\frac{\alpha}{(\lambda-\lambda_1)}+\frac{\beta}{(\lambda-\lambda_2)^2}+\frac{\gamma}{(\lambda-\lambda_2)}\right]\psi(\lambda), \qquad \text{(III.2)}$$

где $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^2$ – минимальный многочлен,

$$\alpha=\left[\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)}(\lambda-\lambda_1)\right]_{\lambda=\lambda_1}=\frac{\exp(\lambda_1 t)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2},$$

$$\beta=\left[\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)}(\lambda-\lambda_1)^2\right]_{\lambda=\lambda_2}=\frac{\exp(\lambda_2 t)}{\lambda_1-\lambda_2},$$

$$\gamma=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)}(\lambda-\lambda_1)^2\right]_{\lambda=\lambda_2}=\frac{[t(\lambda_2-\lambda_1)-1]\exp(\lambda_2 t)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}.$$

В случае трех кратных корней ($\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2$), $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3$,

$$r(\lambda)=\left[\frac{\alpha}{(\lambda-\lambda_1)^3}+\frac{\beta}{(\lambda-\lambda_1)^2}+\frac{\gamma}{(\lambda-\lambda_1)}\right]\psi(\lambda), \qquad \text{(III.3)}$$

$$\alpha=[r(\lambda)]_{\lambda=\lambda_1}=\exp(\lambda_1 t),$$

$$\beta=\frac{\partial}{\partial\lambda}[r(\lambda)]_{\lambda=\lambda_1}=t\exp(\lambda_1 t),$$

$$\gamma=\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[\exp(\lambda_1 t)(\lambda-\lambda_1)^2\right]_{\lambda=\lambda_1}=\frac{1}{2}t^2\exp(\lambda_1 t).$$

Литература

1. Gangopadhyay S., Hadjipanayis G. C., Sorensen C. M., Klabunde K. J. Magnetic properties of ultrafine Co particles // IEEE Trans. Magn.- 1992.- 28, №5, pt 2.- p. 3174-3176.
2. Deng M. C., Hsu S. L., Chin T. S. Acicular γ-Fe_2O_3 particles surface-coated with barium ferrite // IEEE Trans. Magn.- 1992.- 28, №5, pt 2.- p. 2385-238
3. Givord D., Nozieres J. P., Sanches Llazamares J. L., Leccabue F. Magnetization and anisotropy in the hard ferromagnetic phase observed in $Nd_{100-x}Fe_x$ (x<25) as-cost alloys // J. Magn. and Magn. Mater.. - 1992.- 111, № 1-2. - p. 164-170
4. Dhara S., Kotnala R. K., Rastogi A. Ch., Das B. K. Magnetic properties of chemical vapour deposited cobalt doped gamma iron oxide thin films // Jap. J. Appl. Phys. Pt 1.- 1992.- 31, № 12A .- p. 3853-3857.
5. Гапеев А. К., Цельмович В. А. Состав гетерофазноокисленных природных и синтетических титаномагнетитов // Изв. АН СССР.- Физика Земли.- 1988.- №10.- с. 42-49.
6. Крюков И. И., Манаков Н. А. Микромагнетизм двухфазных квазиоднодоменных частиц // ФММ. 1983.- Т. 56. №1. с. 5-8.
7. Крюков И. И., Манаков Н. А., Садков В. Б. Микромагнетизм двухфазных квазиоднодоменных сферических частиц // ФММ. 1985.- Т. 59. №3. с. 455.
8. Крюков И. И., Манаков Н. А., Шилин В. М. Микромагнетизм двухфазных цилиндрических частиц // Физика магнитных явлений. Иркутск, 1984.- с. 106-109.
9. Вонсовский С.В. Магнетизм. М.: Наука, 1971, -1032 с.
10. Губанов В. А., Лихтенштейн А. И., Постников А. В. Магнетики и химическая связь в кристаллах.- М.: Наука, 1985.- 248 с.
11. Neel L. Some theoretical aspects of rock magnetism // Adv. Phys.- 1955.- 4.- №14- p. 99-136.

Рисунки

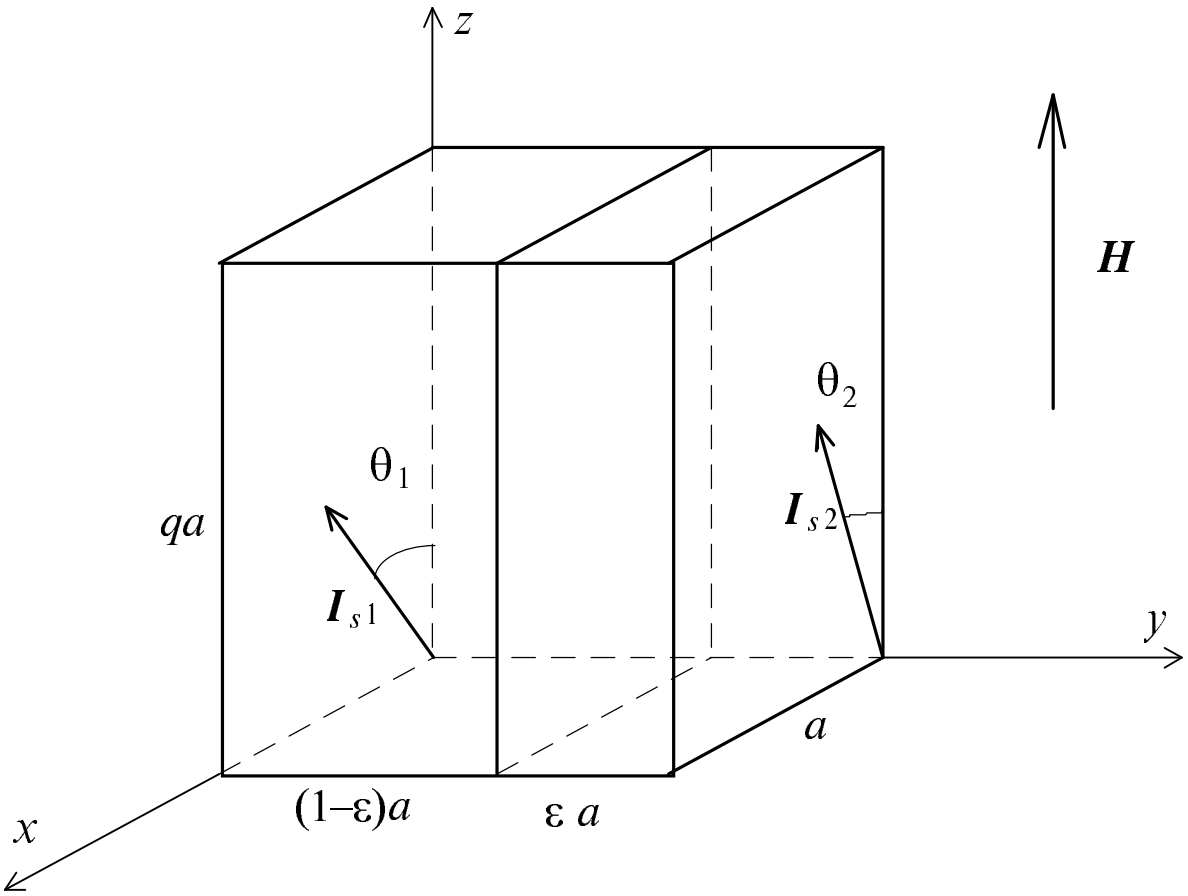

Рис. 1. Иллюстрация к модели двухфазной частицы.

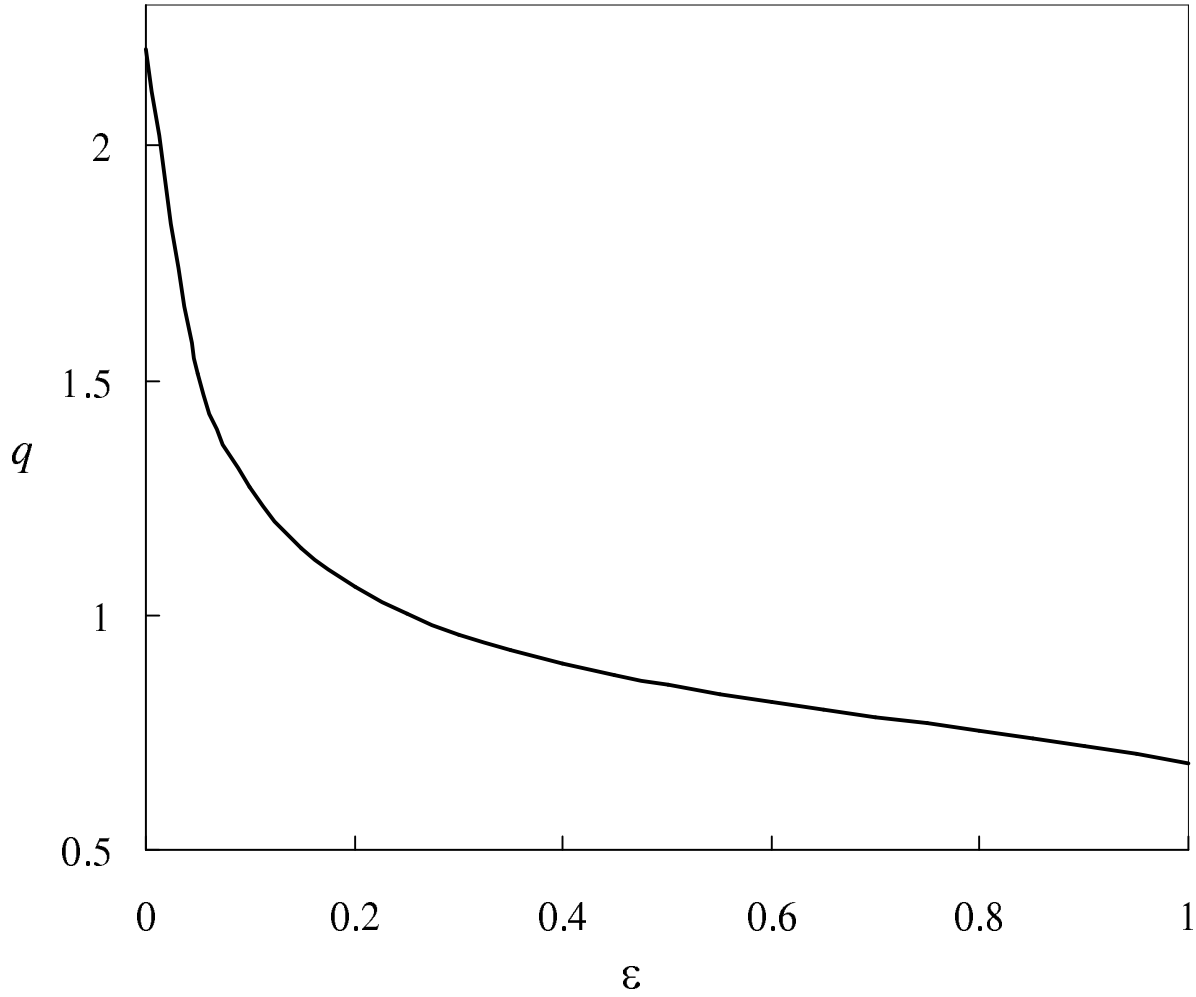

Рис 2. Диаграмма магнитных состояний (ε, q) ансамбля частиц кобальт-цинкового феррита $Co_xZn_{2-x}Ba_3Fe_{24}O_4$ (концентрация кобальта в первой фазе $x_1 = 0$, во второй - $x_2 = 0.5$).