

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАМАГНИЧИВАНИЯ АНСАМБЛЯ ХИМИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СУПЕРПАРАМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ ТИТАНОМАГНЕТИТА

© 1998 г. Л. Л. Афремов, А. В. Панов

Дальневосточный государственный университет, г. Владивосток

Поступила в редакцию 20.12.95 г.

Данная работа, представляющая собой продолжение теоретических исследований ансамбля малых химически неоднородных ферромагнитных частиц [1–3], посвящена разработке более реалистичной (по сравнению с используемыми ранее, см., например, [4–8]) модели природного ферромагнетика и оценке на ее основе различных видов остаточной намагниченности.

Рассмотрим ансамбль одинаковых невзаимодействующих двухфазных частиц, находящийся во внешнем поле H при некоторой температуре T .

Ранее нами [1, 2] было показано, что в отсутствие внешнего магнитного поля двухфазная частица может находиться в одном из перечисленных ниже состояний:

в первом “ $(\uparrow\uparrow)$ -состоянии” магнитные моменты обеих фаз параллельны и направлены вдоль оси OZ (рис. 1);

во втором “ $(\uparrow\downarrow)$ -состоянии” фазы намагничены антипараллельно, а магнитный момент первой фазы I_{s1} направлен по оси OZ ;

третье “ $(\downarrow\downarrow)$ -состояние” отличается от первого антипараллельной относительно оси OZ ориентацией намагниченостей фаз;

в четвертом “ $(\downarrow\uparrow)$ -состоянии” магнитный момент второй фазы направлен вдоль, а первой против оси OZ . Первое и третье состояния метастабильны, так как свободная энергия зерна в этих состояниях больше, нежели во втором и четвертом. Во внешнем магнитном поле H , направленном вдоль оси OZ , все состояния, кроме первого, метастабильны, но самое неустойчивое третье. Переходы из одного состояния в другое могут совершаться при H , большем одного из критических полей, приведенных ниже:

$$H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} = k_1 I_{s1} + \frac{2N_{11}I_{s1} - N_{21}I_{s2}}{1 - \varepsilon}, \quad (1)$$

при котором совершается переход из третьего во второе состояние,

$$H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} = k_2 I_{s2} + \frac{2N_{22}I_{s2} - N_{21}I_{s1}}{\varepsilon}, \quad (2)$$

критическое поле перехода из третьего в четвертое состояние,

$$H_{c3}^{(\uparrow\downarrow)} = \frac{a_1 I_{s1}^2 + a_2 I_{s2}^2 + 2(N_{12} - N_{21})I_{s1}I_{s2}}{(1 - \varepsilon)I_{s1} + \varepsilon I_{s2}}, \quad (3)$$

из третьего состояния в первое,

$$H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} = k_1 I_{s1} + \frac{2N_{11}I_{s1} + N_{21}I_{s2}}{1 - \varepsilon}, \quad (4)$$

из четвертого состояния в первое,

$$H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} = k_2 I_{s2} + \frac{2N_{22}I_{s2} + N_{21}I_{s1}}{\varepsilon}, \quad (5)$$

из второго в первое состояние,

$$H_{c4}^{(\downarrow\downarrow)} = \frac{a_1 I_{s1}^2 + a_2 I_{s2}^2 - 2(N_{12} - N_{21})I_{s1}I_{s2}}{|(1 - \varepsilon)I_{s1} - \varepsilon I_{s2}|}, \quad (6)$$

из второго в четвертое. Здесь I_{s1} и I_{s2} – спонтанные намагниченности, k_1 , k_2 – безразмерные константы кристаллографической анизотропии, $(1 - \varepsilon)$, ε – относительные объемы первой и второй фаз соответственно.

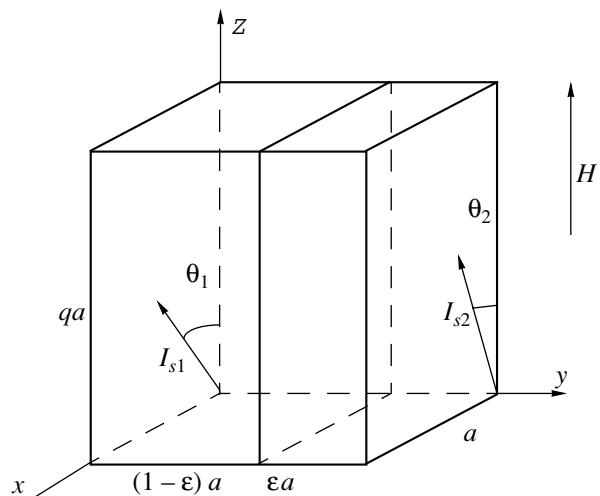


Рис. 1. Иллюстрация к модели двухфазной частицы.

ветственно, $a_1 = 2N_{11} + k_1(1 - \varepsilon)$, $a_2 = 2N_{22} + k_2\varepsilon$, N_{ik} – размагничивающие коэффициенты, определяемые формой и относительными размерами фаз (Приложение I).

В силу малости объема частиц можно ожидать, что за счет тепловых флуктуаций магнитных моментов фаз могут быть реализованы переходы из одного состояния в другое в поле H , меньшем любого критического из рассмотренного выше спектра H_c (1–6).

1. ЧАСТОТА ПЕРЕХОДОВ ИЗ ОДНОГО РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ В ДРУГОЕ

Переориентация магнитного момента одной из фаз определяется высотой потенциального барьера E_{ik} , разделяющего i -е и k -е состояния. Следуя [4], будем считать, что частота перехода из i -го в k -е состояние выражается через E_{ik} следующим образом

$$W_{ik} = f_0 \exp(-E_{ik}/k_b T), \quad (7)$$

где $f_0 \sim 10^8\text{--}10^{10}$ сек $^{-1}$ – характеристическая частота “попыток” преодоления потенциального барьера, k_b – постоянная Больцмана, $E_{ik} = F_{k\max} - F_{i\min}$, где $F_{i\min}$ – свободная энергия равновесного состояния, в котором находилась частица перед переходом, $F_{k\max}$ – максимальное значение свободной энергии, разделяющее i -е и k -е состояния. Например, при $H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} > 0$

$$E_{12} = F(\theta_1 = 0, \theta_2 = \arccos[-(H\varepsilon + N_{21}I_{s1})/a_2I_s]) - F(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0) = \frac{\varepsilon^2(H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} + H)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})}qa^3, \quad (8)$$

где согласно [1, 2]

$$F(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(k_1I_{s1}^2(1 - \varepsilon)\sin^2\theta_1 + k_2I_{s2}^2\varepsilon\sin^2\theta_2)qa^3 - H(I_{s1}(1 - \varepsilon)\cos\theta_1 + I_{s2}\varepsilon\cos\theta_2)qa^3 +$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -(W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{41}) & W_{21} - W_{41} & W_{31} - W_{41} \\ W_{12} - W_{42} & -(W_{21} + W_{23} + W_{24} + W_{42}) & W_{32} - W_{42} \\ W_{13} - W_{43} & W_{23} - W_{43} & -(W_{31} + W_{32} + W_{34} + W_{43}) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} W_{41} \\ W_{42} \\ W_{43} \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (11) удобно записать с помощью матричной экспоненты (Приложение III):

$$\mathbf{N}(t) = \exp(\mathbf{W}t)\mathbf{n}_0 + \int_0^t \exp(\mathbf{W}(t-\tau))d\tau \cdot \mathbf{V}, \quad (13)$$

$$+ (N_{11}I_{s1}^2\sin^2\theta_1 + N_{22}I_{s2}^2\sin^2\theta_2 + N_{12}I_{s1}I_{s2}\sin\theta_1\sin\theta_2 + N_{21}I_{s1}I_{s2}\cos\theta_1\cos\theta_2)qa^3.$$

Если $H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} \leq 0$, то “($\uparrow\uparrow$)-состояние” не реализуется и задача нахождения W_{12} может быть сведена к задаче о случайных блужданиях единичного вектора по сфере, решением которой в первом приближении является $W_{12} = f_0 \exp(-2H\varepsilon I_{s2}qa^3/k_b T)$. Аналогичным образом можно рассчитать E_{ik} для одиннадцати оставшихся переходов (Приложение II) а следовательно и частоты W_{ik} .

2. УРАВНЕНИЕ “ДВИЖЕНИЯ” ДЛЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЙ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Введем нормированный на единицу вектор заселенности $\mathbf{N}(t) = \{N_1(t), N_2(t), N_3(t), N_4(t)\}$. Если начальное состояние ансамбля двухфазных частиц $\mathbf{n}_0 = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ неравновесно, то переход к равновесию можно рассматривать как марковский процесс с дискретными состояниями, который описывается системой из четырех уравнений

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{k \neq i}^4 (-W_{ik}N_i + W_{ki}N_k) \quad (9)$$

с начальными условиями $N_i(t=0) = n_i$, $i, k = 1, \dots, 4$.

Используя условие нормировки

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \quad (10)$$

и исключив из (9) N_4 , перепишем систему (9) в матричной форме

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{WN} + \mathbf{V}. \quad (11)$$

Здесь приняты обозначения:

Соотношения (12)–(13) при известном векторе начального состояния \mathbf{n}_0 полностью определяют заселенность магнитных состояний ансамбля двухфазных частиц.

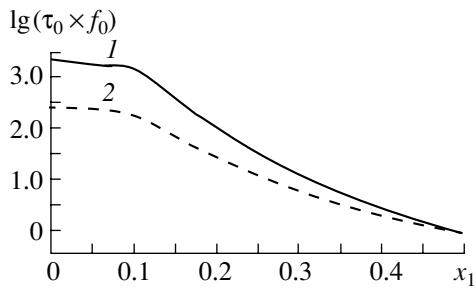


Рис. 2. Зависимость времени релаксации τ_0 от концентрации Ti x_1 для ансамбля химически однородных, кривая 1, ($\epsilon = 0$) и химически неоднородных, кривая 2, ($\epsilon = 0.3$) частиц с $x_2 = 0.6$, $a = 10$ нм, $q = 1.5$.

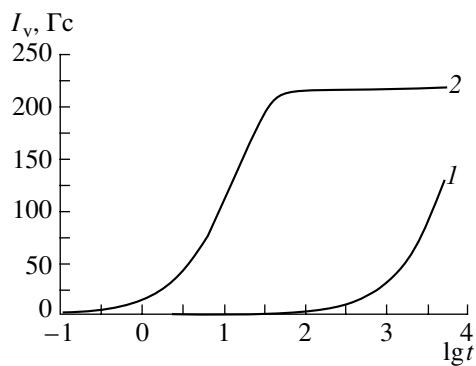


Рис. 3. Вязкая намагниченность ансамбля химически однородных 1 ($\epsilon = 0$) и химически неоднородных 2 ($\epsilon = 0.3$) зерен титаномагнетита со следующими параметрами: $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.6$, $q = 1.5$, $a = 18$ нм, $H = 50$ Э, $f_0 = 10^9$ сек⁻¹, t – в секундах.

Намагниченность такого ансамбля может быть рассчитана с помощью следующего соотношения:

$$I_v = c[(I_{s1}(1-\epsilon) + I_{s2}\epsilon)(N_1 - N_3) + (I_{s1}(1-\epsilon) + I_{s2}\epsilon)(N_2 - N_4)], \quad (14)$$

где c – объемная концентрация ферромагнитных частиц.

3. НАМАГНИЧЕННОСТЬ АНСАМБЛЯ МАЛЫХ ХИМИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Проведем моделирование процесса намагничивания ансамбля малых двухфазных частиц, магнитные свойства которых подобны свойствам титаномагнетитов. Некорректность выбора магнетика (в силу кубической симметрии элементарной кристаллографической ячейки титаномагнетиты магнитно многоосны) может быть оправдана тем фактом, что с увеличением вытянутости зерна исчезает эквивалентность кристаллографических осей и при $q > 1.2$ “легкой” осью является ось, выделяемая анизотропией формы [6, 9, 10]. С другой стороны, использование разработанной модели

может помочь установить некоторые качественные соотношения для титаномагнетитов, являющихся основными носителями магнитных свойств горных пород.

Для моделирования процессов намагничивания воспользуемся линейной интерполяцией результатов экспериментов по определению спонтанной намагниченности $I_s = I_s(x)$ и кристаллографической анизотропии $k = k(x)$ титаномагнетитов $\text{Fe}_{3-x}\text{Ti}_x\text{O}_4$ от концентрации титана x [11]:

$$I_s(x) = (-598.5x + 485) \text{ Гс},$$

$$k = \begin{cases} 0.425(1.36 + 11.4x), & x < 0.1, \\ 0.425(2.89 - 3.9x), & x > 0.1. \end{cases} \quad (15)$$

В расчетах полагалось, что первая фаза обеднена, а вторая (правая на рис. 1) обогащена титаном ($x_1 < x_2$).

3.1. Время релаксации и вязкая намагниченность ансамбля невзаимодействующих частиц

Три собственные значения матрицы \mathbf{W} , определенные из уравнения $\det|\mathbf{W} - \lambda\mathbf{E}| = 0$, где \mathbf{E} – единичная матрица, можно интерпретировать как обратные времена релаксации τ_i . Причем наименьшее τ соответствует “времени жизни” самого неустойчивого состояния, а наибольшее время релаксации τ_0 – самому устойчивому.

На рис. 2 представлены результаты расчета зависимости приведенного времени релаксации устойчивого состояния τ_0 ансамбля двухфазных частиц от концентрации титана в первой фазе x_1 .

Уменьшение химической неоднородности зерна (увеличение x_1) приводит к уменьшению τ_0 (рис. 2), причем в области $x_1 < 0.1$ время релаксации практически не меняется и резко падает при $x_1 > 0$. Такое поведение времени релаксации связано с уменьшением $I_s(x)$ и немонотонным изменением константы кристаллографической анизотропии $k(x)$.

В рамках обсуждаемой модели невзаимодействующих частиц был проведен расчет вязкой намагниченности $I_v(t)$ от $\lg t$ (рис. 3). Как и следовало ожидать, уменьшение времени релаксации с ростом химической неоднородности приводит к росту вязкой намагниченности.

3.2. Гистерезисные свойства и остаточная намагниченность ансамбля невзаимодействующих двухфазных зерен

Малые частицы, находясь в суперпармагнитном состоянии, могут проявлять гистерезисные свойства лишь при условии, что время, прошедшее после выключения внешнего магнитного поля H , или время спада поля до $H = 0$ меньше времени релаксации. Поэтому нами была выбрана следующая процедура моделирования процесса

намагничивания – магнитное поле дискретно изменялось с некоторым шагом вплоть до максимального, намагниченность, образующаяся на каждом шаге за время, меньшее времени релаксации, определялась с помощью соотношений (13), (14), в которых вектор начального состояния полагался равным вектору конечного состояния предыдущего шага. Естественно, что с увеличением размеров зерен подобная ситуация может быть реализована в интервале “разумных” (соизмеримых со временем измерений) промежутков времени.

Результаты исследования коэрцитивной H_c и остаточной намагниченности насыщения I_{rs} , которые определялись по петле гистерезиса (рис. 4), представлены на рис. 5. Незначительное измерение гистерезисных характеристик в области $x_1 < 0.1$ и резкое падение этих параметров в области $x_1 > 0.1$ связано с немонотонностью поведения константы кристаллографической анизотропии (рост $k(x)$ при $x < 0.1$ и спад при $x > 0.1$, (15)). Такое изменение коэрцитивной силы и остаточной намагниченности насыщения, в конечном счете, связано с уменьшением $\tau_0(x_1)$, которое обусловлено уменьшением степени неоднородности распределения титана по объему зерна (рис. 2).

4. ВЫВОДЫ

Повышение химической неоднородности зерен титаномагнетита при уменьшении содержания Ti в одной из фаз приводит к увеличению времени релаксации системы таких частиц и, как результат, к росту гистерезисных характеристик: коэрцитивной силы и остаточной намагниченности насыщения.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Магнитостатическая энергия двухфазного зерна

Магнитостатическую энергию зерна можно рассматривать как энергию взаимодействия магнитных зарядов с поверхностной плотностью

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} \iint_{SS'} \frac{(\mathbf{I}_s(\mathbf{r}) d\mathbf{S})(\mathbf{I}_s(\mathbf{r}') d\mathbf{S}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (I.1)$$

Используя симметрию задачи перепишем (I.1) в следующем виде:

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^8 \iint_{S_i S_k} \frac{(\mathbf{I}_s(\mathbf{r}_i) d\mathbf{S}_i)(\mathbf{I}_s(\mathbf{r}_k) d\mathbf{S}_k)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}, \quad (I.2)$$

где \mathbf{r}_i – координаты точек поверхности S_i (см. рис. 1).

Так как компоненты векторов намагниченности первой и второй фазы выражаются через на-

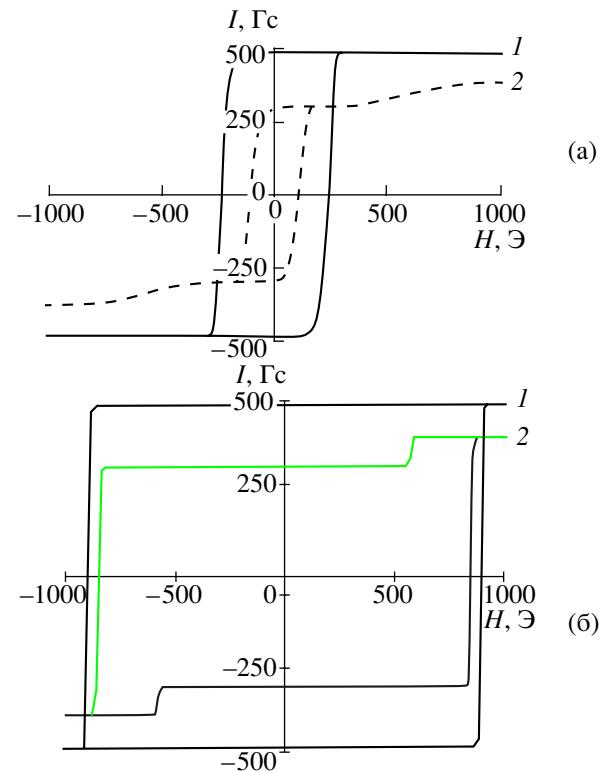


Рис. 4. Петли гистерезиса для системы двухфазных частиц со следующими параметрами: $x_1 = 0$, $x_2 = 0.6$, $q = 1.5$, $f_0 = 10^9$ сек $^{-1}$, $I - \varepsilon = 0$, $2 - \varepsilon = 0.3$, $a = 15$ нм, $T = 10$ с (а), $a = 50$ нм, $T = 10^3$ с (б), T – период изменения поля H .

правляющие косинусы $\mathbf{I}_{s1} = \{I_{s1} \sin \theta_1, 0, I_{s1} \cos \theta_1\}$, $\mathbf{I}_{s2} \{I_{s2} \sin \theta_2, 0, I_{s2} \cos \theta_2\}$, то

$$\begin{aligned} \epsilon_m = & N_{11} I_{s1}^2 \sin^2 \theta_1 + N_{22} I_{s2}^2 \sin^2 \theta_2 + \\ & + N_{12} I_{s1} I_{s2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 + N_{21} I_{s1} I_{s2} \cos \theta_1 \cos \theta_2, \end{aligned} \quad (I.3)$$

где

$$N_{11} = \frac{4}{q} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} (1 - \varepsilon - y)[f_1(y) - f_2(y)] dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(1 - q)(1 - \varepsilon)^2 \left[\ln(1 - \varepsilon) - \frac{3}{2} \right] \right\};$$

$$N_{22} = \frac{4}{q} \left\{ \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon - y)[f_1(y) - f_2(y)] dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(1 - q)\varepsilon^2 \left[\ln \varepsilon - \frac{3}{2} \right] \right\};$$

$$N_{12} = \frac{4}{q} \left\{ \int_0^{\varepsilon} f_1(y) y dy + \varepsilon \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_1(y) y dy + \right.$$

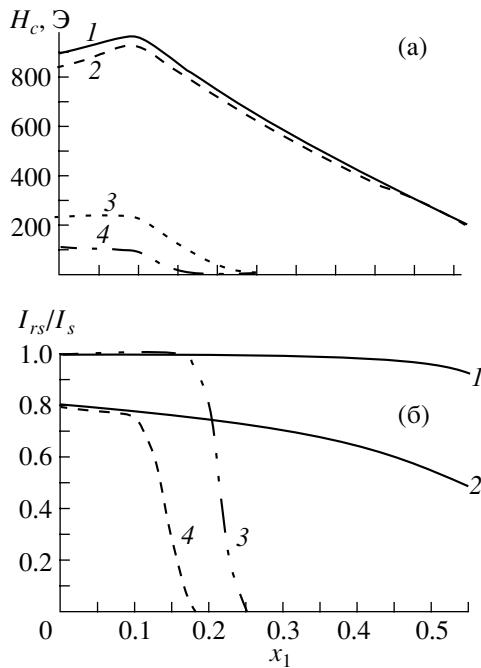


Рис. 5. Зависимость коэрцитивной силы H_c (а) и отношения остаточной намагниченности насыщения к спонтанной I_{rs}/I_s (б) от концентрации титана x_1 ($x_2 = 0.6$, $q = 1.5$): кривая 1 – $\varepsilon = 0$, $a = 50$ нм; кривая 2 – $\varepsilon = 0.3$, $a = 50$ нм; кривая 3 – $\varepsilon = 0$, $a = 15$ нм; кривая 4 – $\varepsilon = 0.3$, $a = 15$ нм.

$$\begin{aligned}
 & + \int_{1-\varepsilon}^1 (1-y)f_1(y)ydy \Big] + \\
 & + 2[\varepsilon^2 \ln \varepsilon + (1-\varepsilon)^2 \ln(1-\varepsilon) + 3\varepsilon(1-\varepsilon)]; \\
 N_{21} = & \frac{4}{q} \left[\int_0^\varepsilon f_2(y)ydy + \varepsilon \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f_2(y)ydy + \right. \\
 & \left. + \int_{1-\varepsilon}^1 (1-y)f_2(y)ydy \Big] + \\
 & + \frac{2}{q} [\varepsilon^2 \ln \varepsilon + (1-\varepsilon)^2 \ln(1-\varepsilon) + 3\varepsilon(1-\varepsilon)]; \\
 f_1(y) = & q \ln \left\{ \frac{(\sqrt{q^2 + y^2} + q)\sqrt{1+y^2}}{(\sqrt{1+q^2+y^2} + q)|y|} \right\} - \\
 & - \sqrt{q^2 + y^2} + \sqrt{1+q^2+y^2} - \sqrt{1+y^2} - |y| + q \ln y; \\
 f_2(y) = & \ln \left\{ \frac{(\sqrt{1+y^2} + q)\sqrt{q^2+y^2}}{\sqrt{1+q^2+y^2+1})|y|} \right\} - \\
 & - \sqrt{q^2 + y^2} + \sqrt{1+q^2+y^2} - \sqrt{1+y^2} - |y| + \ln y.
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Выражения для энергетических барьеров

$$E_{12} = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2(H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} + H)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} > 0; \\ 2H\varepsilon I_{s2}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} < 0; \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$$E_{14} = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)^2(H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} + H)^2}{2(k_1(1-\varepsilon) + 2N_{11})}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} > 0; \\ 2H(1-\varepsilon)I_{s2}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} < 0; \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$$E_{41} = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)^2(H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} - H)^2}{2(k_1(1-\varepsilon) + 2N_{11})}, & H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} > H; \\ -2H(1-\varepsilon)I_{s2}, & H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} < H; \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$$E_{34} = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2(H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} - H)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} > H; \\ -2H\varepsilon I_{s2}, & H_{c2}^{(\uparrow\uparrow)} < H; \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

$$E_{21} = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2(H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} - H)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})}, & H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} > H; \\ -2H\varepsilon I_{s2}, & H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} < H; \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

$$E_{32} = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)^2(H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} - H)^2}{2(k_1(1-\varepsilon) + 2N_{11})}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} > H; \\ -2H(1-\varepsilon)I_{s2}, & H_{c1}^{(\uparrow\uparrow)} < H; \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

$$E_{23} = \frac{(1-\varepsilon)^2(H_{c1}^{(\uparrow\downarrow)} + H)^2}{2(k_1(1-\varepsilon) + 2N_{11})}; \quad (\text{II.7})$$

$$E_{43} = \frac{\varepsilon^2(H_{c2}^{(\uparrow\downarrow)} + H)^2}{2(k_2\varepsilon + 2N_{22})}; \quad (\text{II.8})$$

$$E_{13} = \frac{(H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} + H)^2(I_{s1}(1-\varepsilon) + I_{s2}\varepsilon)}{2H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}}; \quad (\text{II.9})$$

$$E_{31} = \begin{cases} \frac{(H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} - H)^2(I_{s1}(1-\varepsilon) + I_{s2}\varepsilon)}{2H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)}}, & H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} > H; \\ -2H(I_{s1}(1-\varepsilon) + I_{s2}\varepsilon), & H_{c3}^{(\uparrow\uparrow)} < H; \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$$\begin{aligned}
 & E_{24} = \\
 & = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)} - H)^2 |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|}{2H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}}, \\ H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)} > H, \quad \varepsilon > \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ -2H|I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|, \quad H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)} > H, \quad \varepsilon > \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ \frac{(H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)} + H)^2 |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|}{2H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}}, \quad \varepsilon < \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \end{array} \right. \quad (\text{II.11}) \\
 & E_{42} = \\
 & = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)} - H)^2 |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|}{2H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}}, \\ H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)} > H, \quad \varepsilon < \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ -2H|I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|, \quad H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)} > H, \quad \varepsilon < \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \\ \frac{(H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)} + H)^2 |I_{s1}(1-\varepsilon) - I_{s2}\varepsilon|}{2H_{c4}^{(\downarrow\uparrow)}}, \quad \varepsilon > \frac{I_{s1}}{I_{s1} + I_{s2}}; \end{array} \right. \quad (\text{II.12})
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Выражение матричной экспоненты через матрицу переходов

Для решения задачи, условие которой вынесено в заглавие данного приложения, воспользуемся интерполяционным многочленом Сильвестра–Лагранжа, который в случае отсутствия кратных корней матрицы \mathbf{W} ($\lambda_0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$) имеет вид:

$$r(\lambda) = \sum \exp(\lambda_k t) \frac{\prod_{i \neq k} (\lambda - \lambda_i)}{\prod_{i \neq k} (\lambda_i - \lambda_k)}. \quad (\text{III.1})$$

Если \mathbf{W} имеет два кратных корня, например $\lambda_0 = \lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$r(\lambda) = \left[\frac{\alpha}{(\lambda - \lambda_1)} + \frac{\beta}{(\lambda - \lambda_2)^2} + \frac{\gamma}{(\lambda - \lambda_2)} \right] \psi(\lambda), \quad (\text{III.2})$$

где $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2$ – минимальный многочлен,

$$\alpha = \left[\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} (\lambda - \lambda_1) \right]_{\lambda=\lambda_1} = \frac{\exp(\lambda_1 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$

$$\beta = \left[\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} (\lambda - \lambda_1)^2 \right]_{\lambda=\lambda_2} = \frac{\exp(\lambda_2 t)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} (\lambda - \lambda_1)^2 \right]_{\lambda=\lambda_2} = \frac{[t(\lambda_2 - \lambda_1) - 1] \exp(\lambda_2 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}.$$

В случае трех кратных корней ($\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$), $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$,

$$r(\lambda) = \left[\frac{\alpha}{(\lambda - \lambda_1)^3} + \frac{\beta}{(\lambda - \lambda_1)^2} + \frac{\gamma}{(\lambda - \lambda_1)} \right] \psi(\lambda), \quad (\text{III.3})$$

$$\alpha = [r(\lambda)]_{\lambda=\lambda_1} = \exp(\lambda_1 t),$$

$$\beta = \frac{\partial}{\partial \lambda} [r(\lambda)]_{\lambda=\lambda_1} = t \exp(\lambda_1 t),$$

$$\gamma = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [\exp(\lambda_1 t) (\lambda - \lambda_1)^2]_{\lambda=\lambda_1} = \frac{1}{2} t^2 \exp(\lambda_1 t).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афремов Л.Л., Харитонский П.В., Ралин А.Ю. Метастабильность магнитного состояния двухфазного однодоменного зерна // Хим. намагниченность: теория и эксперимент: Сб. науч. тр. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 1991. 108 с.
2. Афремов Л.Л., Харитонский П.В., Ралин А.Ю. Особенности кривых намагничивания ансамбля химически неоднородных двухфазных зерен // Физика Земли. 1995. № 6. С. 80–84.
3. Афремов Л.Л., Харитонский П.В. Особенности намагничивания двухфазного однодоменного зерна: Материалы XXXIII Всесоюзной межвузовской научно-технической конференции. Владивосток, 1990. С. 74–76.
4. Neel L. Some theoretical aspects of rock magnetism // Adv. Phys. 1955. V. 4. № 14. P. 99–136.
5. Шербаков В.П., Ламаши Б.Е., Шербакова В.В. Физика магнетизма горных пород. М.: Наука, 1991. 188 с.
6. Афремов Л.Л., Белоконь В.И. К расчету остаточной намагниченности системы однодоменных частиц // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. № 4. С. 122–128.
7. Афремов Л.Л., Харитонский П.В. О магнитостатическом взаимодействии в ансамбле растущих однодоменных зерен // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. № 8. С. 101–105.
8. Афремов Л.Л., Багинский Ю.Л. К расчету химической намагниченности гетерофазноокисленных титаномагнетитов // Хим. намагниченность: теория и эксперимент: Сб. науч. тр. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 1991. 108 с.
9. Афремов Л.Л., Белоконь В.И. Влияние механических напряжений на магнитные состояния и критическое поле однодоменных частиц // Физика Земли. 1980. № 2. С. 101–104.
10. Шолло Л.Е. Использование магнетизма горных пород для решения геологических задач. Л.: Недра, 1977. 182 с.
11. Syono Y. Magnetocrystalline anisotropy and magnetostriction of Fe_3O_4 – Fe_2TiO_4 series with special application to rock magnetism // Japan. J. Geophys. 1965. V. 4. № 1. P. 71–143.